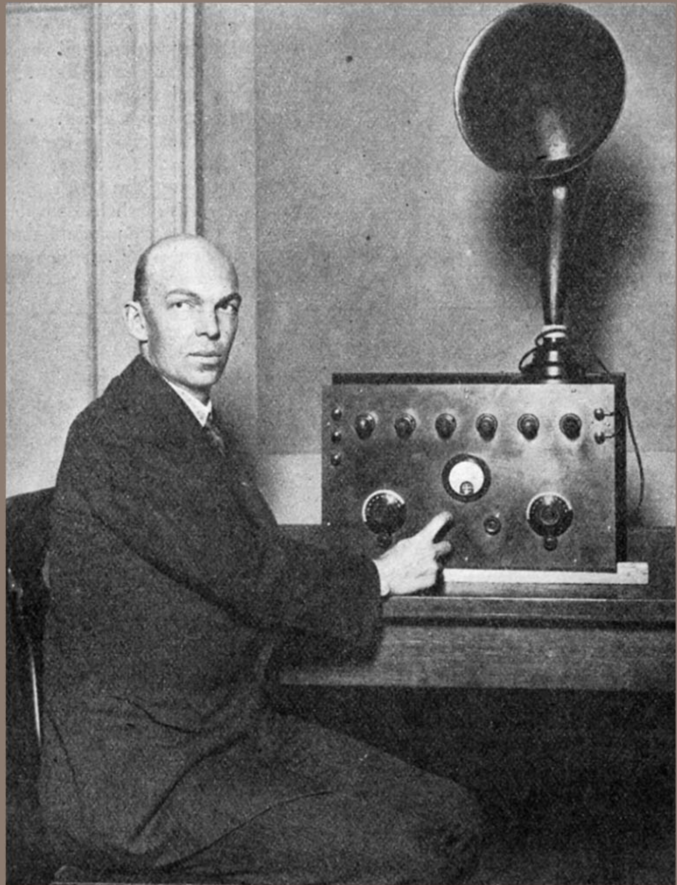


History in Pictures - On January 5th, 1940, Edwin H. Armstrong transmitted the first FM radio signal from Yonkers, NY to Alpine, NJ to Meriden, CT to Paxton, MA to Mount Washington. 5 January is National FM Radio Day.

EEM3006 - HABERLEŞME TEORİSİ

NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ

EEM3006 - HABERLEŞME TEORİSİ

- **Dersin Öğretim Elemanı:** Yrd. Doç. Dr. Yasin KABALCI
- **Ders Görüşme Saati:** Çarşamba, 09:30-12:00
  Çarşamba, 15:45-17:00
- **e-m@il:** yasinkabalci@gmail.com
- **Ders Web Sayfası:** kabalci.wordpress.com

EEM3006 - HABERLEŞME TEORİSİ

HAFTALIK İÇERİK

Hafta	Konular
1	Giriş ve Temel Kavramlar
2	İşaretler ve Doğrusal Sistemler, Temel Kavramlar
3	İşaretler ve Doğrusal Sistemler, Fourier Analizi
4	İşaretler ve Doğrusal Sistemler, Süzgeç Tasarımı, Alçak geçiren ve Band geçiren İşaretler
5	Genlik Modülasyonu
6	Genlik Modülasyonu
7	Genlik Demodülasyonu
8	Açı Modülasyonuna Giriş
9	Faz ve Frekans Modülasyonu
10	Açı Demodülasyonu
11	Olasılık ve Rastgele Süreçler
12	Olasılık ve Rastgele Süreçler
13	Analog İletişim Sistemleri Üzerinde Gürültünün Etkisi
14	Analog İletişim Sistemleri Üzerinde Gürültünün Etkisi

Ara Sınav (% 40)

Final (% 60)

EEM3006 - HABERLEŞME TEORİSİ

İÇERİK

- **GİRİŞ**
  - Haberleşme Sistemlerinin Elemanları
  - Modülasyon, Modülasyon Türlerinin Sınıflandırılması
- **SPEKTRAL ANALİZ ve DOĞRUSAL SİSTEMLERDEN İLETİM**
  - Fourier Serileri, Fourier Dönüşümü ve Özellikleri
  - Enerji ve Güç Spektral Yoğunlukları
  - Katlama İntegrali, Transfer Fonksiyonu
  - Genlik ve Faz Bozulmaları, Süzgeçler
- **GENLİK MODÜLASYONU (GM)**
  - Çift Yan Band (ÇYB) Modülasyonu ve Modülatör Yapıları
  - Tek Yan Band (TYB) Modülasyonu ve Modülatör Yapıları
  - Artık Yan Band (AYB) Modülasyonu
  - GM İşaretlerin Demodülasyonu
  - Frekans Bölmeli Çoğullama
- **AÇI MODÜLASYONU**
  - Faz ve Frekans Modülasyonu (PM ve FM)
  - FM İşaretlerin Üretimi ve Demodülasyonu

EEM3006 - HABERLEŞME TEORİSİ

İÇERİK *(devam)*

- **OLASILIK ve RASTGELE SÜREÇLER**
  - Olasılık ve Rastgele Değişkenlerin İncelenmesi
  - Rastgele Süreçler
  - Gauss ve Beyaz Süreçler
- **ANALOG İLETİŞİM SİSTEMLERİ ÜZERİNDE GÜRÜLTÜNÜN ETKİSİ**
  - Genlik Modülasyon Sistemlerinde Gürültünün Etkisi
  - Açı Modülasyonu Üzerinde Gürültünün Etkisi
  - Analog Modülasyon Sistemlerinin Karşılaştırılması
  - Analog İletişim Sistemlerinde İletim Kayıpları ve Gürültünün Etkileri
- **ÖRNEKLEME ve ANALOG DARBE MODÜLASYONU**
  - Örnekleme Teoremi
  - Darbe Genlik Modülasyonu (PAM) ve Zaman Bölmeli Çoğullama (TDM)
  - Darbe Zaman Modülasyonu Türleri (PDM, PPM)

- Temel Tanımlar
- Tek Tonlu FM
- Dar Bantlı FM
- Çok Tonlu FM
- FM Sinyallerin Üretilmesi
- FM Sinyallerin Demodülasyonu

Genlik Modülasyonunun Dezavantajları

Genlik modülasyonunun basitlik ve bant genişliği verimliliği gibi avantajları olmasına karşın dezavantajları da bulunmaktadır. Bunlar:

- ✓ **GM'de bilgi taşıyıcı işaretin genliğinde gizlidir. GM'de yüksek performans için lineer yükselteçler oldukça önemlidir. Ancak maliyet ve küçük boyutların önemli olduğu uygulamalarda lineer yükselteçleri gerçekleştirmek zordur.**
- ✓ **ÇYB-TB ve TYB GM sistemlerde pratikte kullanılan çok düşük genlikli taşıyıcı işaret gürültüden etkilenerek, kaybolabilmektedir.**
- ✓ **GM sistemlerde iletim bant genişliği doğrudan mesaj işaretinin bant genişliğine bağlıdır. Bu ise daha iyi performans için daha geniş bant genişliği kullanımını anlamsızlaştırmaktadır.**

Neden Açı Modülasyonu?

- ✓ Genlik modülasyonunun dezavantajlarını ortadan kaldırır.
- ✓ Genlik modülasyonuna göre gürültü ve diğer bozucuların etkilerini azaltır.
- ✓ Açı modülasyonunu gerçekleştiren cihazlar daha az karmaşıklığa sahiptir.

Dezavantajları:

- ✓ Modüle edilmiş işaretin bant genişliğinin, mesaj işaretinin bant genişliğine oranının çok artması dezavantaj olarak sayılabilir. Kısacası çok daha yüksek bant genişliği kullanır.
- ✓ Açı modülasyonu devreleri daha pahalıdır.

4.1. Temel Tanımlar

Açı Modülasyonu : Bir taşıyıcı sinyalin açısının m(*t*) sinyali ile değiştirilmesi ile elde edilir. Açı, frekans veya evre vasıtasıyla iki ayrı yolla değiştirilebilir. Bu yüzden, açı modülasyonu, seçilen yaklaşıma göre

- Frekans modülasyonu
- Evre modülasyonu

şeklinde yapılır.

Açı modülasyonlu işaretin genel ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$s(t) = A_c \cos\left[\theta_i(t)\right]$$

4.1. Temel Tanımlar

$s(t) = A_c \cos[\theta_i(t)]$ **Taşıyıcı sinyal**

$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + \phi_c$ **Açı**

ϕ_c **Açının t=0 anındaki değeri**

$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta_i(t)}{dt}$ **Anlık frekans**

Ortalama frekans (Hz cinsinden):

$$\boxed{f_{\Delta t}(t) = \frac{\theta_i(t+\Delta t) - \theta_i(t)}{2\pi\ \Delta t}}$$

Evre Modülasyonu

$\theta_i(t)$, $m(t)$ **temel bant sinyali ile doğrusal olarak değiştirilir**

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + k_p m(t)$$

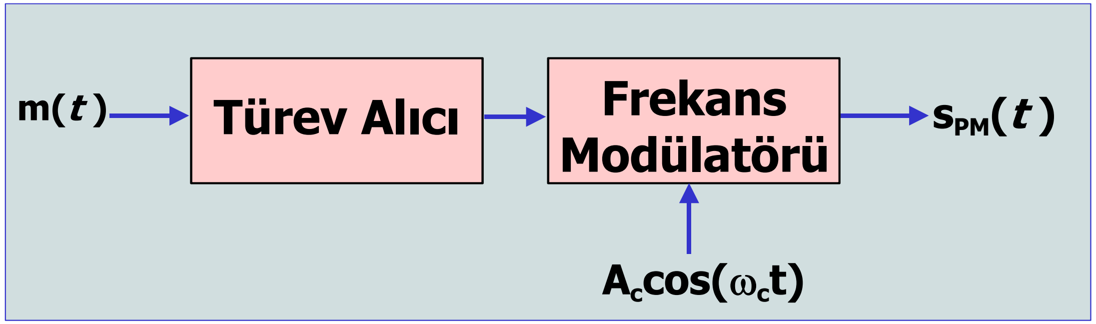
Modülasyonsuz taşıyıcının açısı

Modülatörün evre duyarlılığı [rad/volt]

Modüle edilmiş sinyal

$$s(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + k_p m(t)\right)$$

Not: $\phi_c = 0$ **kabul edilmiştir.**



Frekans Modülasyonu

$f_i(t)$, $m(t)$ **temel bant sinyali ile doğrusal olarak değiştirilir**

$$f_i(t) = f_c + k_f m(t)$$

Modülasyonsuz taşıyıcının frekansı

Modülatörün frekans duyarlılığı [Hz/volt]

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^{\tau} m(\tau)d\tau$$

Modüle edilmiş sinyal

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^{\tau} m(\tau)d\tau\right]$$

Not: $\phi_c = 0$ **kabul edilmiştir.**

Frekans Modülasyonu

$f_i(t)$, $m(t)$ **temel bant sinyali ile doğrusal olarak değiştirilir**

$$f_i(t) = f_c + k_f m(t)$$

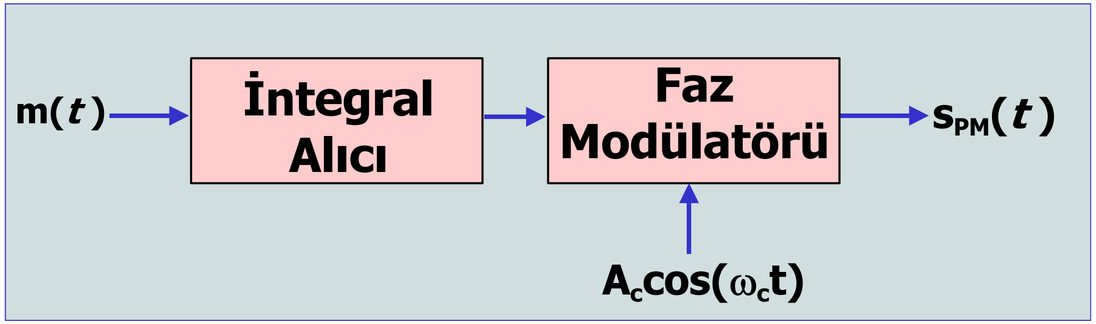
Modülasyonsuz taşıyıcının frekansı

Modülatörün frekans duyarlılığı [Hz/volt]

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^{\tau} m(\tau)\, d\tau$$

Modüle edilmiş sinyal

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^{\tau} m(\tau)\, d\tau\right]$$

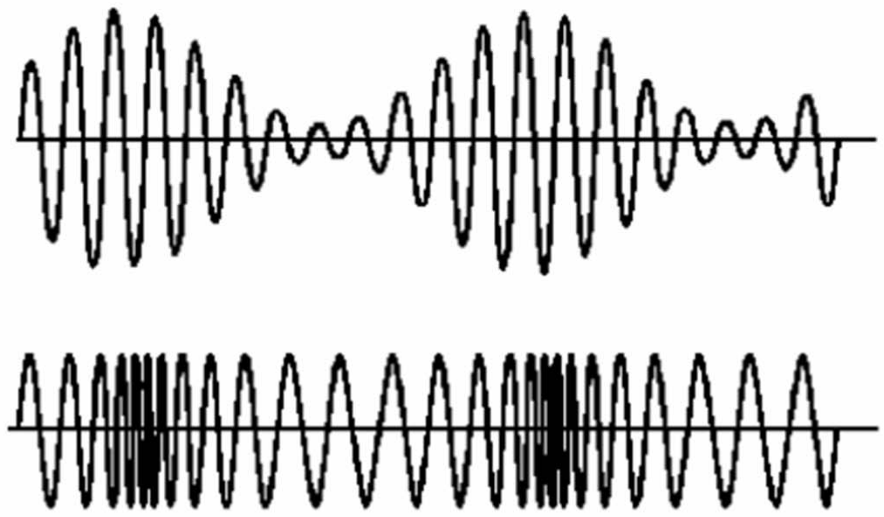


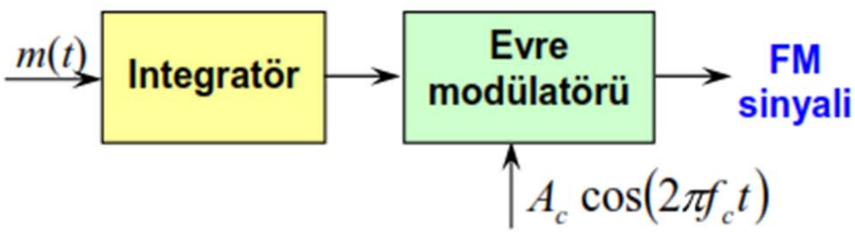
Not: $\phi_c = 0$ **kabul edilmiştir.**

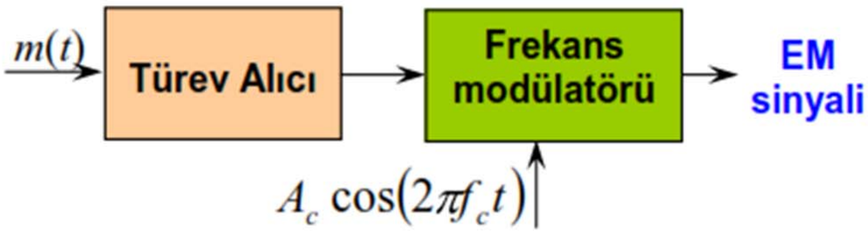
Bazı Gözlemler

Genlik Modülasyonu
Sinyal sıfır geçişleri düzgün Sinyal genliği sabit değil

Açı Modülasyonu
Sinyal sıfır geçişleri düzgün değil Sinyal genliği sabit



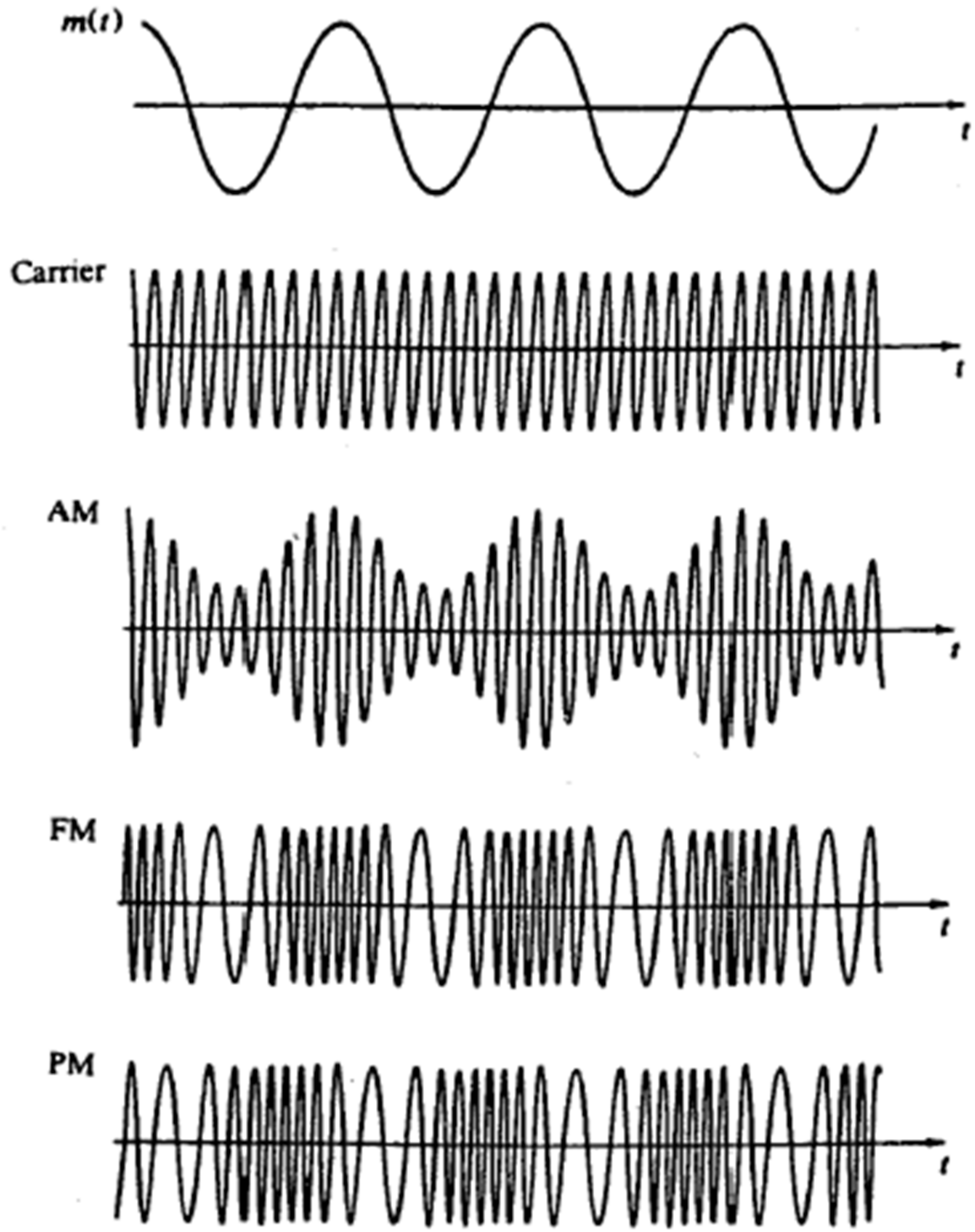




FM sinyali Evre Mödülatörü ile veya EM sinyali Frekans Modülatörü ile üretilebilir.

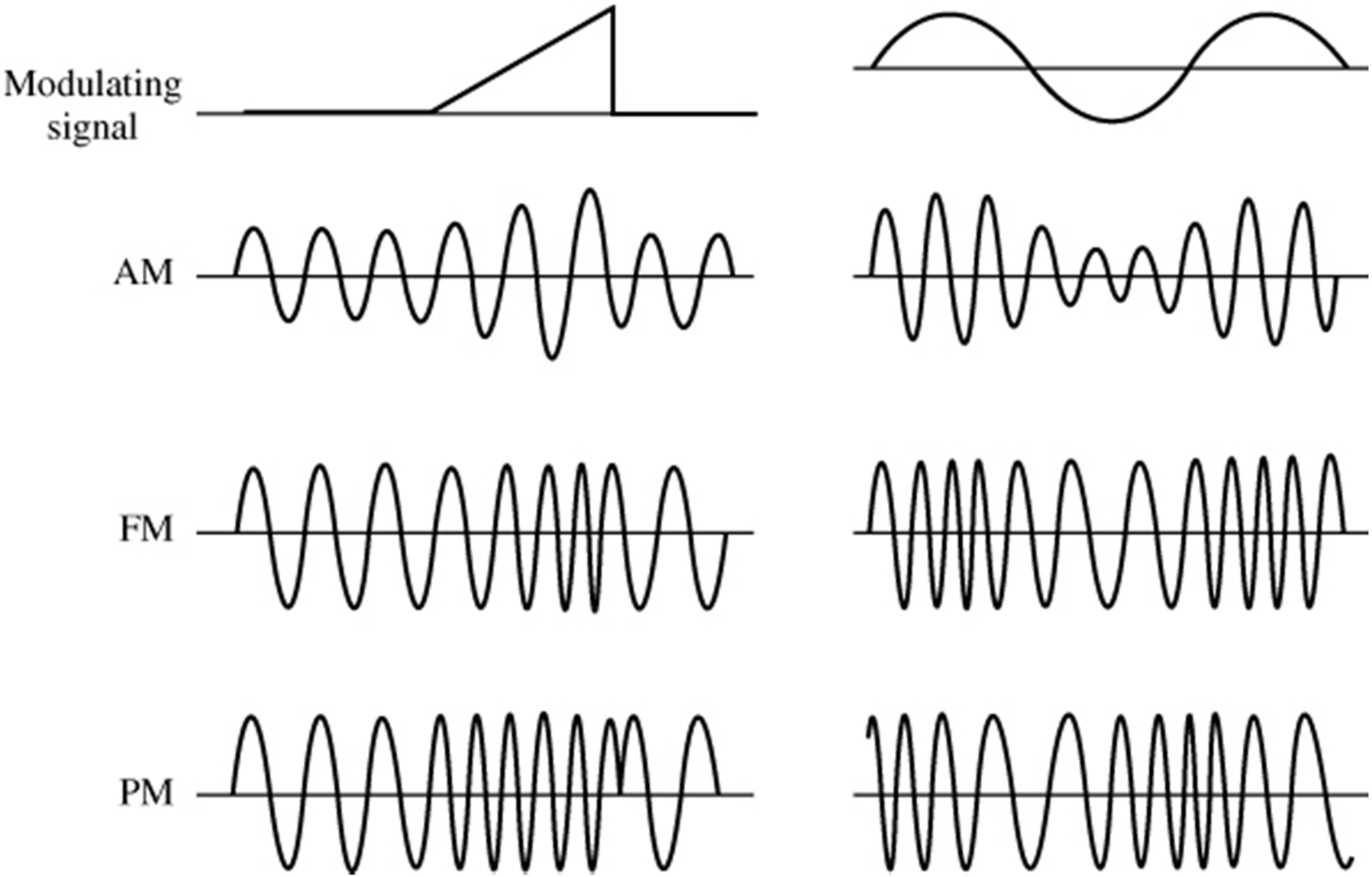
$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^{\tau} m(\tau)\, d\tau\right]$$

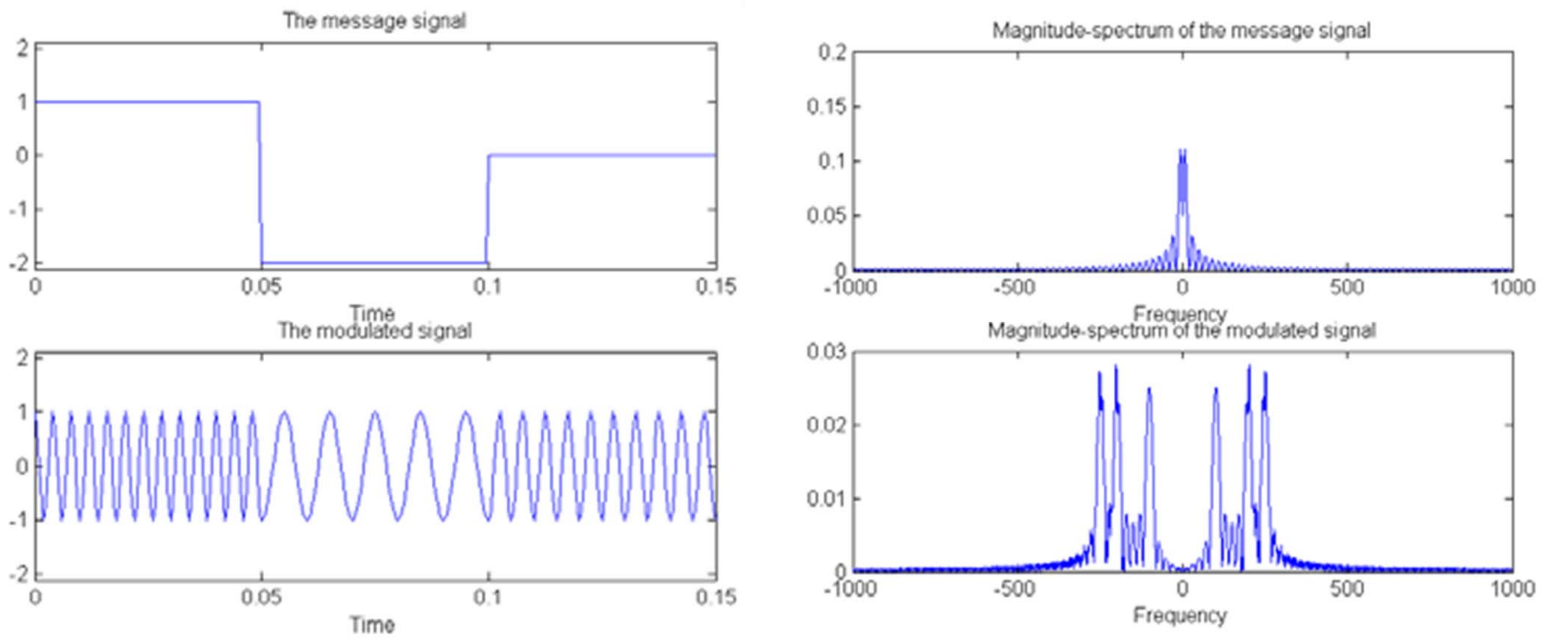
$$s(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + k_p m(t)\right)$$



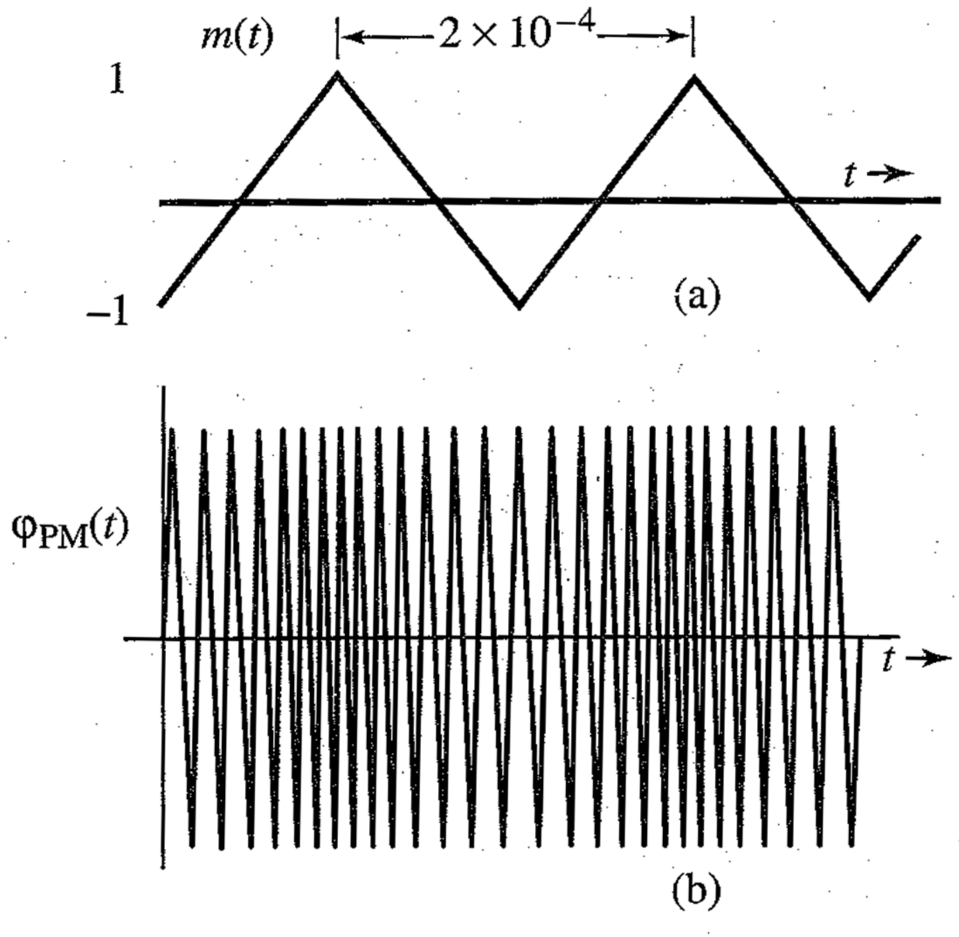
m(t)
t
Carrier
t
AM
t
FM
t
PM
t

AÇI MODÜLASYONU




The message signal
2
1
0
-1
-2
0
0.05
0.1
0.15
Time
Magnitude-spectrum of the message signal
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-1000
-500
0
500
1000
Frequency
The modulated signal
2
1
0
-1
-2
0
0.05
0.1
0.15
Time
Magnitude-spectrum of the modulated signal
0.03
0.02
0.01
0
-1000
-500
0
500
1000
Frequency

Örnek: Aşağıdaki şekilde mesaj işareti ve frekans modülasyonlu işaret verilmektedir. Taşıyıcı frekansı f_c = 100 MHz, k_f = 2π*10⁵ ise ani frekans aralığını (min ve max değerlerini) bulunuz.



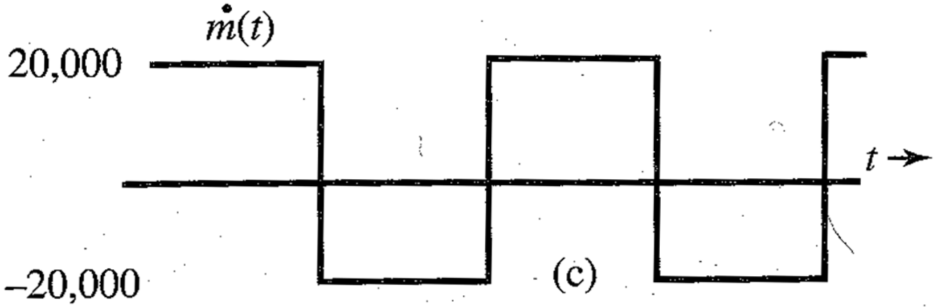
$$\omega_i = \omega_c + k_f m(t)$$

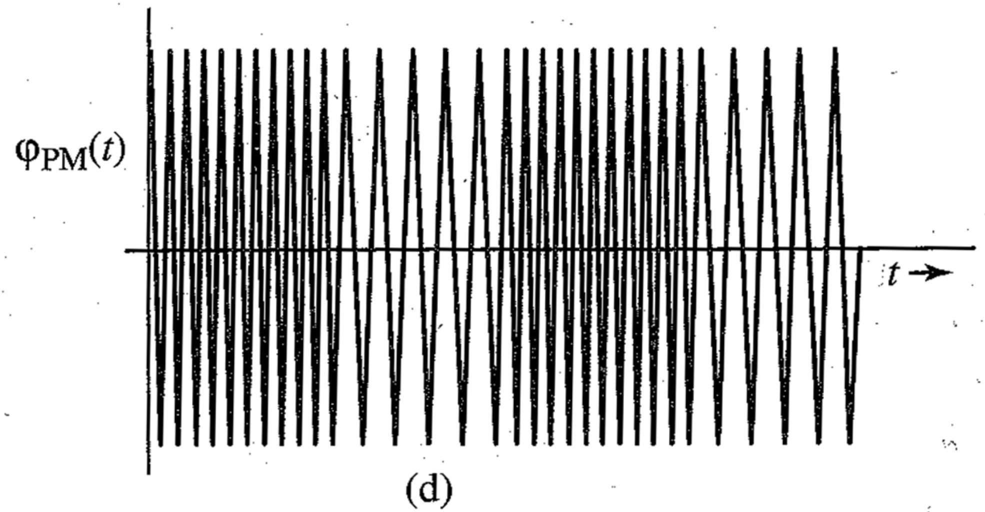
$$f_i = f_c + \frac{k_f}{2\pi} m(t) = 10^8 + 10^5 m(t)$$

$$(f_i)_{\min} = 10^8 + 10^5 \left[m(t)\right]_{\min} = 99.9MHz$$

$$(f_i)_{\max} = 10^8 + 10^5 \left[m(t)\right]_{\max} = 100.1MHz$$

Örnek: Aşağıdaki şekilde mesaj işareti ve faz modülasyonlu işaret verilmektedir. Taşıyıcı frekansı f_c = 100 MHz, k_p = 10π ise ani frekans aralığını (min ve max değerlerini) bulunuz.





$$f_i = f_c + \frac{k_p}{2\pi}\dot{m}(t) = 10^8 + 5\dot{m}(t)$$

$$(f_i)_{\min} = 10^8 + 5\left[\dot{m}(t)\right]_{\min} = 99.9MHz$$

$$(f_i)_{\max} = 10^8 + 5\left[\dot{m}(t)\right]_{\max} = 100.1MHz$$

Frekans modülasyonunda 99.9 MHz ile 100.1 MHz aralığında <u>tüm değerler</u>, Faz modülasyonunda ise <u>sadece</u> 99.9 MHz ve 100.1 MHz değerleri vardır.

4.2. Tek Tonlu FM

FM sinyallerinin analizi için, mümkün en basit durum olan tek tonlu mesaj sinyali durumunu inceleyelim.

$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$$

$$f_i(t) = f_c + k_f A_m \cos(2\pi f_m t)$$
$$= f_c + \Delta f \cos(2\pi f_m t)$$

$\Delta f = k_f A_m$ (f_c den) max frekans sapması

Dikkat! Δf m(*t*) nin genliğine bağlı.

$$\theta_i(t) = 2\pi \int_0^t f_i(\tau)\, d\tau$$
$$= 2\pi f_c t + \frac{\Delta f}{f_m}\sin(2\pi f_m t)$$
$$= 2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)$$

$\beta = \dfrac{\Delta f}{f_m}$ modülasyon indeksi

m(*t*) nin genliğine ve frekansına bağlı.

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)\right]$$

Darbant FM : β küçük **1 radyan** **Genişbant FM** : β büyük **1 radyan**

Dar Bantlı FM

✓ Tek tonlu FM modüleli işaretin eşitliği:

$$s_{FM}(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)\right]$$

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ trigonometrik eşitliği kullanılarak düzenlenirse:

$$s_{FM}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)\cos\left[\beta \sin(2\pi f_m t)\right] - A_c \sin(2\pi f_c t)\sin\left[\beta \sin(2\pi f_m t)\right]$$

elde edilir. Ayrıca β 1 radyan değerinden küçük olduğu için aşağıdaki kabuller yapılabilir:

$$\cos\left[\beta \sin(2\pi f_m t)\right] \simeq 1$$

$$\sin\left[\beta \sin(2\pi f_m t)\right] \simeq \beta \sin(2\pi f_m t)$$

✓ **Böylece tek tonlu FM modüleli işaret:**

$$s_{FM}(t) \simeq A_c \cos(2\pi f_c t) - \beta A_c \sin(2\pi f_c t)\sin(2\pi f_m t)$$

✓ **Sadeleştirilmiş tek tonlu FM modüleli işaret aynı zamanda** $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\cos(a-b) - \frac{1}{2}\cos(a+b)$ **trigonometrik eşitliği kullanılarak aşağıdaki düzenlenebilir:**

$$s_{FM}(t) \simeq A_c \cos(2\pi f_c t) - \frac{1}{2}\beta A_c \left\{\cos\left[2\pi(f_c + f_m)t\right] - \cos\left[2\pi(f_c - f_m)t\right]\right\}$$

Geniş Bantlı FM

- ✓ **Tek tonlu FM modüleli işaretin eşitliği:**

$$s_{FM}(t) = A_c \cos\left[\, 2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)\right]$$

ifadesi Euler eşitliğine bağlı olarak aynı zamanda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$s_{FM}(t) = A_c \operatorname{Re}(e^{j2\pi f_c t} e^{j\beta \sin 2\pi f_m t})$$

- ✓ **Bu eşitlikteki** $e^{j\beta \sin 2\pi f_m t}$ f_m **ifadesi ile periyodik olarak değiştiğinden dolayı bu eşitlik Fourier serilerine açılabilir:**

$$c_n = \frac{\omega_m}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_m}^{\pi/\omega_m} e^{j\beta \sin \omega_m t} e^{-jn\omega_m t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j(nx-\beta \sin x)} dx$$

- ✓ **Bu integral kapalı formda çözülemez, bu integral *n*. dereceden 1. çeşit Bessel fonksiyonu olarak adlandırılır ve** $J_n(\beta)$ **ile gösterilir.**

- Bessel Fonksiyonu **(x= 2πf_mt)** :

$$J_n(\beta) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j(nx-\beta \sin x)} dx$$

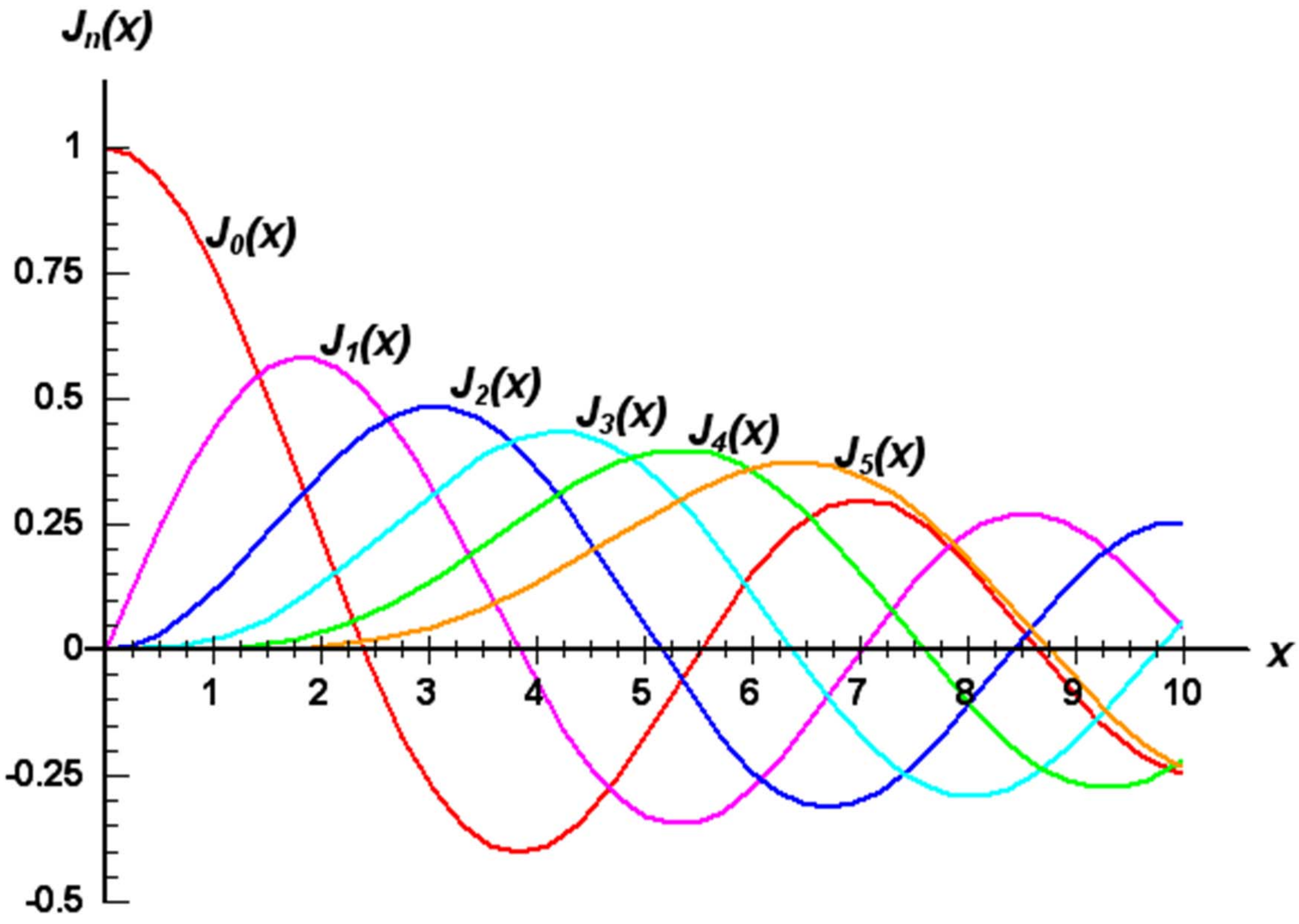
- Bessel fonkiyonu FM işaretinin eşitliğinde yerine yazılarak aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$s_{FM}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos[2\pi(f_c + nf_m)t]$$

- Frekans eksenindeki eşdeğeri ise,

$$S_{FM}(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \left[\delta(f - f_c - nf_m) + \delta(f + f_c + nf_m)\right]$$

Örnek Bessel Fonksiyonu Grafikleri



Bessel Fonksiyonu Değerleri

$J_n(x)$								
0.5	*1*	*2*	*3*	*4*	*6*	*8*	*10*	*12*
0.9385	0.7652	0.2239	−0.2601	−0.3971	0.1506	0.1717	−0.2459	0.0477
0.2423	0.4401	0.5767	0.3391	−0.0660	−0.2767	0.2346	0.0435	−0.2234
0.0306	0.1149	0.3528	0.4861	0.3641	−0.2429	−0.1130	0.2546	−0.0849
0.0026	0.0196	0.1289	0.3091	0.4302	0.1148	−0.2911	0.0584	0.1951
0.0002	0.0025	0.0340	0.1320	0.2811	0.3576	−0.1054	−0.2196	0.1825
—	0.0002	0.0070	0.0430	0.1321	0.3621	0.1858	−0.2341	−0.0735
	—	0.0012	0.0114	0.0491	0.2458	0.3376	−0.0145	−0.2437
		0.0002	0.0025	0.0152	0.1296	0.3206	0.2167	−0.1703
		—	0.0005	0.0040	0.0565	0.2235	0.3179	0.0451
			0.0001	0.0009	0.0212	0.1263	0.2919	0.2304
			—	0.0002	0.0070	0.0608	0.2075	0.3005
				—	0.0020	0.0256	0.1231	0.2704
					0.0005	0.0096	0.0634	0.1953
					0.0001	0.0033	0.0290	0.1201
					—	0.0010	0.0120	0.0650

Bessel Fonksiyonunun Bazı Özellikleri

- ✓ **Hem pozitif hem de negatif tüm *n* değerleri için** $J_n(\beta)=(-1)^n J_{-n}(\beta)$

$$J_n(\beta)=J_{-n}(\beta) \qquad \textit{Eğer } n \textit{ çift ise}$$
$$J_n(\beta)=-J_{-n}(\beta) \qquad \textit{Eğer } n \textit{ tek ise}$$

- ✓ **Modülasyon indeksi *β*'nın küçük değerleri için ise:**

$$J_0(\beta)\cong 1 \qquad J_1(\beta)\cong \frac{\beta}{2} \qquad J_n(\beta)\cong 0 \quad n>2 \textit{ için}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)=1$$

- ✓ **Bir FM işaretinin spektrumu bir taşıyıcı bileşen ve f_m, $2f_m$, $3f_m$, … gibi taşıyıcı frekanslarının katlarında simetrik olarak dağılmış sonsuz sayıda yan bant bileşenleri içerir.**

Tek tonlu FM ile GM karşılaştırılırsa:

- **FM doğrusal olmayan bir modülasyondur.**
- **FM sinyallerinin spektrumunun $m(t)$ ile bağlantısı basit değildir.**
- **FM sinyalinin bant genişliği, $m(t)$'ninkinden çok büyüktür.**
- **FM sinyallerinin spektrumu, bir taşıyıcı ve etrafına simetrik olarak yerleşmiş sonsuz sayıda yan frekanslar içerir.**
- **FM sinyalinin taşıyıcı genliği $J_0(\beta)$ ile modülasyon indeksine bağlıdır.**

Modüle eden sinusoidal sinyal m(t) nin genlik ve frekansındaki değişmeler FM sinyalinin spektrumunu nasıl etkiler?

Bunu iki ayrı durumda inceleyelim.

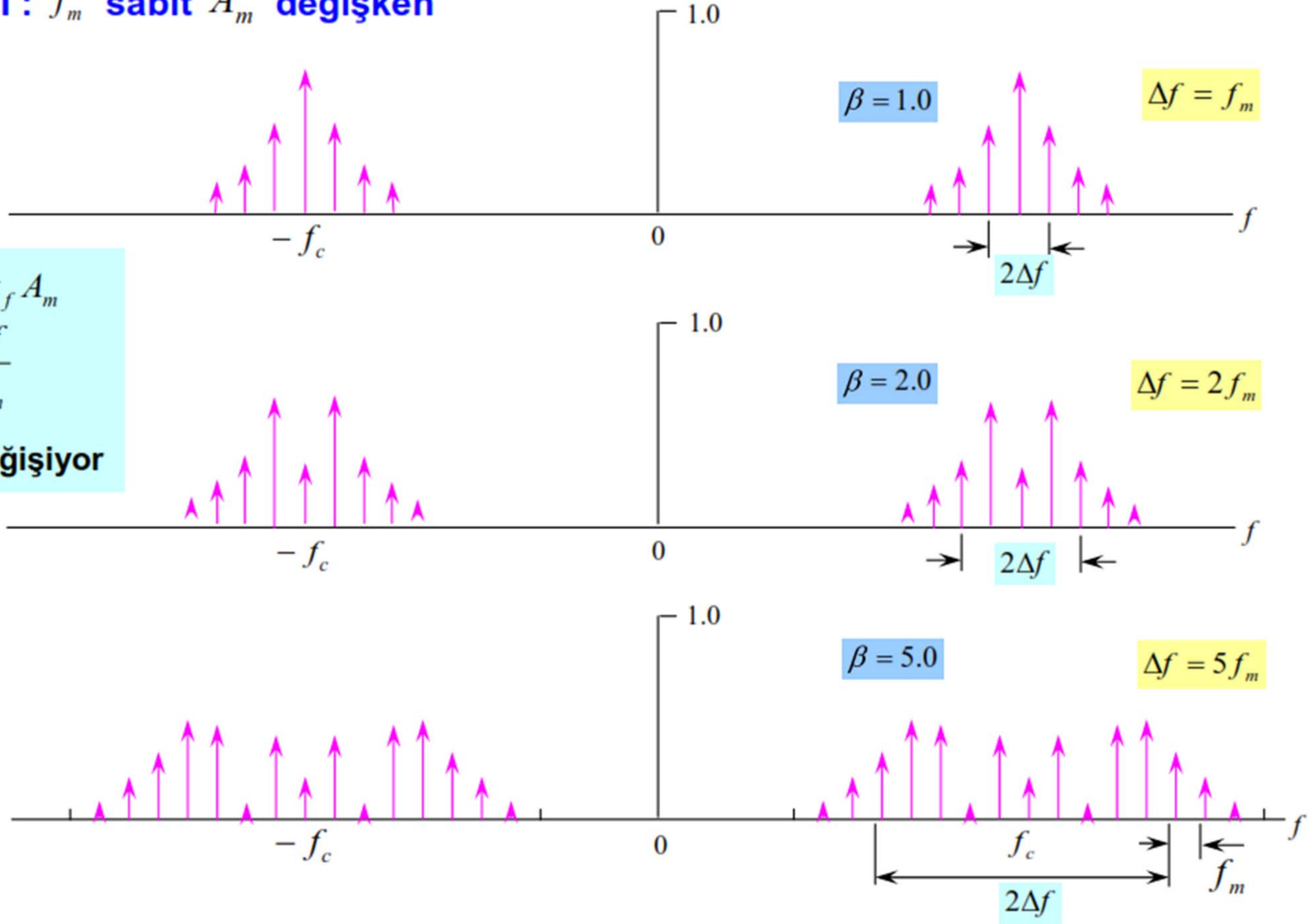
1. **Frekans sabit, Genlik değişken**
2. **Genlik sabit, Frekans değişken**

Durum I : f_m **sabit** A_m **değişken**

$\Delta f = k_f A_m$

$\beta = \dfrac{\Delta f}{f_m}$

Δf **değişiyor**



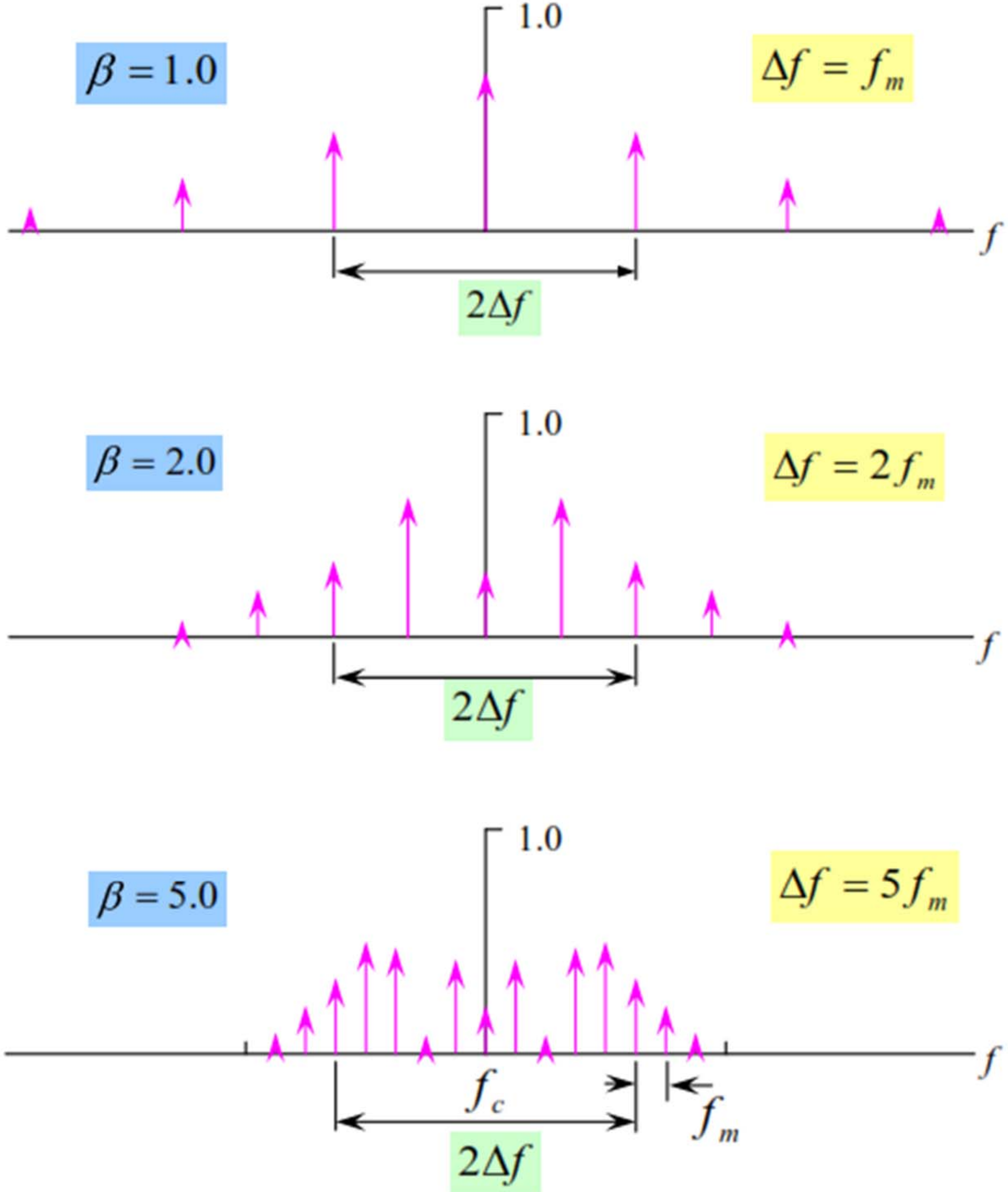
Durum II: A_m sabit f_m değişken

Not: Sadece pozitif frekanslar gösterilmiştir

$$\Delta f = k_f A_m$$

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m}$$

f_m **değişiyor**



4.3. Dar Bantlı FM

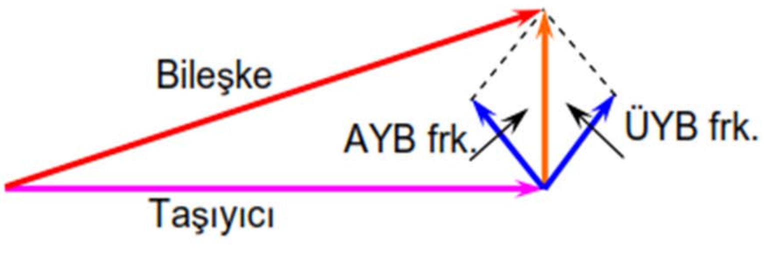
β<1 olduğunda FM spektrumunun $J_0(\beta)$ ve $J_1(\beta)$ haricindeki bileşenleri ihmal edilebilir değerde olduğundan, sinyal sadece $f_c \pm f_m$ yan frekanslarından oluşmaktadır. Bu durumda sinyal, Darbant FM olarak adlandırılır.

$$s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\cos\left[2\pi(f_c + nf_m)t\right]$$

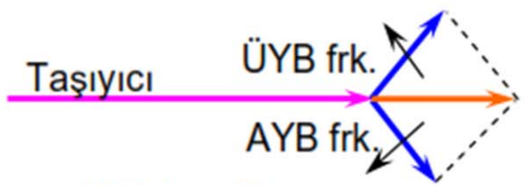
β<1 için, sinyal bileşenlerinin sadece n= -1, 0, 1 için olanları anlamlıdır.

$$s(t) \cong A_c \cos(2\pi f_c t) + \tfrac{1}{2}\beta A_c\left\{\cos\left[2\pi(f_c + f_m)t\right] - \cos\left[2\pi(f_c - f_m)t\right]\right\}$$

$$s_{AM}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) + \tfrac{1}{2}\mu A_c\left\{\cos\left[2\pi(f_c + f_m)t\right] + \cos\left[2\pi(f_c - f_m)t\right]\right\}$$



Darbant FM sinyali



AM sinyali

Darbant FM bant genişliği AM bant genişliği ile aynıdır

4.4. Çok Tonlu FM

Pratikte kullanılan sinyaller, çok sayıda (binlerce) tondan meydana gelirler.

$$m(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t)$$

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + \beta_1 \sin(2\pi f_1 t) + \beta_2 \sin(2\pi f_2 t)\right] \qquad \beta_1 = \frac{\Delta f_1}{f_1} \qquad \beta_2 = \frac{\Delta f_2}{f_2}$$

$$s(t) = A_c \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m(\beta_1) J_n(\beta_2) \cos\left[2\pi(f_c + mf_1 + nf_2)t\right]$$

Sinyal dört tür terimden meydana gelir:

1. f_c **frekansında ve** $J_0(\beta_1)J_0(\beta_2)$ **terimli taşıyıcı bileşeni.**
2. $f_c \pm mf_1$ **frekanslarında** $J_m(\beta_1)J_0(\beta_2)$ **terimli yan frekanslar.**
3. $f_c \pm nf_2$ **frekanslarında** $J_0(\beta_1)J_n(\beta_2)$ **terimli yan frekanslar.**
4. $f_c \pm mf_1 \pm nf_2$ **frekanslarında** $J_m(\beta_1)J_n(\beta_2)$ **terimli yan frekanslar.**

FM spektrumu, aynı modüle eden sinyal için AM spektrumu ile karşılaştırıldığında süperpozisyon ilkesinin FM için geçerli olmadığı kolayca görülür.

4.4. FM İşaretler için Bant Genişliği

- Teoriksel olarak bir FM işareti sonsuz sayıda yan frekanslar içermektedir. Bu yüzden bant genişliği sonsuza yakındır.

- Pratikte ise FM işaretinin spektrumu sonlu sayıdaki yan frekanslara etkin bir şekilde sınırlandırılmaktadır çünkü iletim için sınırlı bir bant genişliği gerekmektedir.

- Tek tonlu modülasyon işareti ile üretilmiş bir FM işaretinin iletim bant genişliği için üretilmiş yaklaşımsal bir kural şöyledir:

$$B_T = 2\Delta f + 2f_m = 2\Delta f\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$$

$$\Delta f = k_f A_m$$

- İletim bant genişliği için türetilmiş olan bu yaklaşım Carson kuralı olarak adlandırılmaktadır.

- FM işaretler için alternatif bir bant genişliği hesaplama yöntemi daha bulunmaktadır.
- Bu yöntemde genlikleri önceden belirlenmiş belli bir değerden daha büyük olan önemli yan frekansların maksimum sayısı göz önünde bulundurulmaktadır.
- Seçilecek olan bu değer **modüle edilmemiş taşıyıcı işaretin genliğinin %1'ine eşittir**.
- Yani iletim bant genişliği, modüle edilmemiş taşıyıcı genliğinin %1'den büyük olmayan iki yan frekans arasındaki açıklıktır:

$$B_T = 2n_{\max} f_m$$

- Burada f_m mesaj işaretinin frekansını ve n_{max} ise $\left|J_n(\beta)\right| > 0.01$ şartını sağlayan tamsayı n'in maksimum değeridir.

- n_{max} değeri β'ya göre değişir ve Bessel fonksiyonunun tablo değerlerinden belirlenebilir.

- Aşağıdaki tabloda değişik β değerleri için (hem üst hem de alt yan frekansları kapsayan) önemli yan frekansların toplam sayısını göstermektedir.

β	$2n_{max}$
0.1	2
0.3	4
0.5	4
1.0	6
2.0	8

β	$2n_{max}$
5.0	16
10.0	28
20.0	50
30.0	70

Örnek: Amerika'da ticari FM yayıncılığı için Δf frekans sapmasının maksimum değeri 75 kHz olarak belirlenmiştir. Eğer modülasyon frekansı olarak 15 kHz kullanılır ise gerekli iletim bant genişliğinin değeri ne olur?

- **Carson Kuralı kullanılırsa:**

$$B_T = 2\Delta f + 2f_m = 2(75) + 2(15) = 180\,KHz.$$

- **Alternatif yöntem kullanılırsa:**

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{75}{15} = 5$$

Bu değere karşılık gelen $2n_{max}$ 16 olduğundan,

$$B_T = 2n_{\max} f_m = 16 \times 15 = 240\ kHz$$

- Pratikte ise her bir FM kanalı için 200 kHz bant genişliği tahsis edilmektedir.

Örnek: $s_{FM}(t) = 100\cos\left[2\pi 10000t + \phi(t)\right]$ **FM işareti düşünülsün. Frekans duyarlılığı k_f=5 ve mesaj işareti** $m(t) = 10\cos(2\pi 100t)$ **ise FM işaretinin ortalama gücünü bulunuz.**

Çözüm:

$$\Delta f = k_f A_m = 5 \times 10 = 50 \qquad \beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{50}{100} = 0.5$$

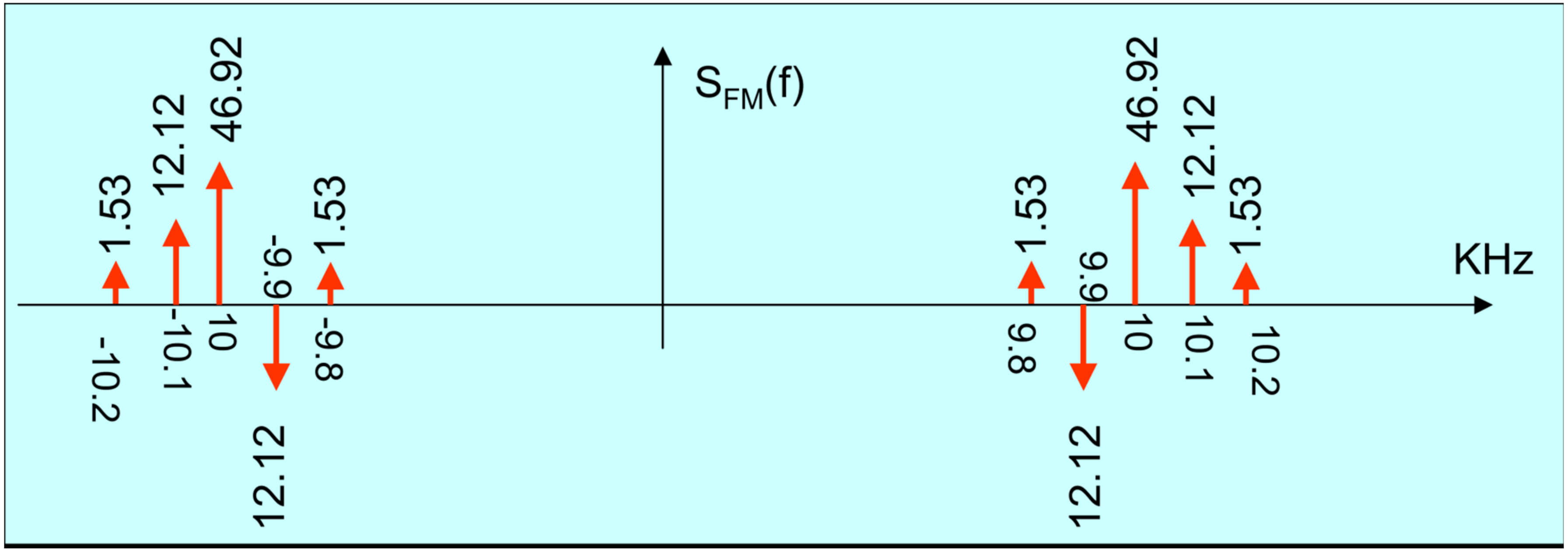
- **Bu değere karşılık gelen 2n_{max} = 4 olduğundan,**

$$B_T = 2n_{\max} f_m = 4 \times 100 = 400\ Hz$$

$$s_{FM}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\cos\left[2\pi\left(f_c + nf_m\right)t\right]$$

$$s_{FM}(t) = 100\left\{\begin{aligned}&J_0(\beta)\cos\left(2\pi f_c t\right) + J_1(\beta)\cos\left(2\pi\left(f_c + f_m\right)t\right) + J_{-1}(\beta)\cos\left(2\pi\left(f_c - f_m\right)t\right)\\&+J_2(\beta)\cos\left(2\pi\left(f_c + 2f_m\right)t\right) + J_{-2}(\beta)\cos\left(2\pi\left(f_c - 2f_m\right)t\right)\end{aligned}\right\}$$

$$s_{FM}(t) = 100\left\{\begin{aligned}&0.9385\cos\left(2\pi 10t\right) + 0.2423\cos\left(2\pi(10.1)t\right) - 0.2423\cos\left(2\pi(9.9)t\right)\\&+0.0306\cos\left(2\pi(10.2)t\right) + 0.0306\cos\left(2\pi(9.8)t\right)\end{aligned}\right\} \quad kHz$$



Bir FM işaretinin ortalama gücü:

$$P = \frac{1}{2} A_c^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta)$$

$$P = \frac{1}{2} A_c^2 \left(J_0^2(\beta) + J_1^2(\beta) + J_{-1}^2(\beta) + J_2^2(\beta) + J_{-2}^2(\beta) \right)$$

$$P = \frac{1}{2} 100^2 \left(0.9385^2 + 0.2423^2 + 0.2423^2 + 0.0306^2 + 0.0306^2 \right)$$
$$= 5000.3678\ W$$

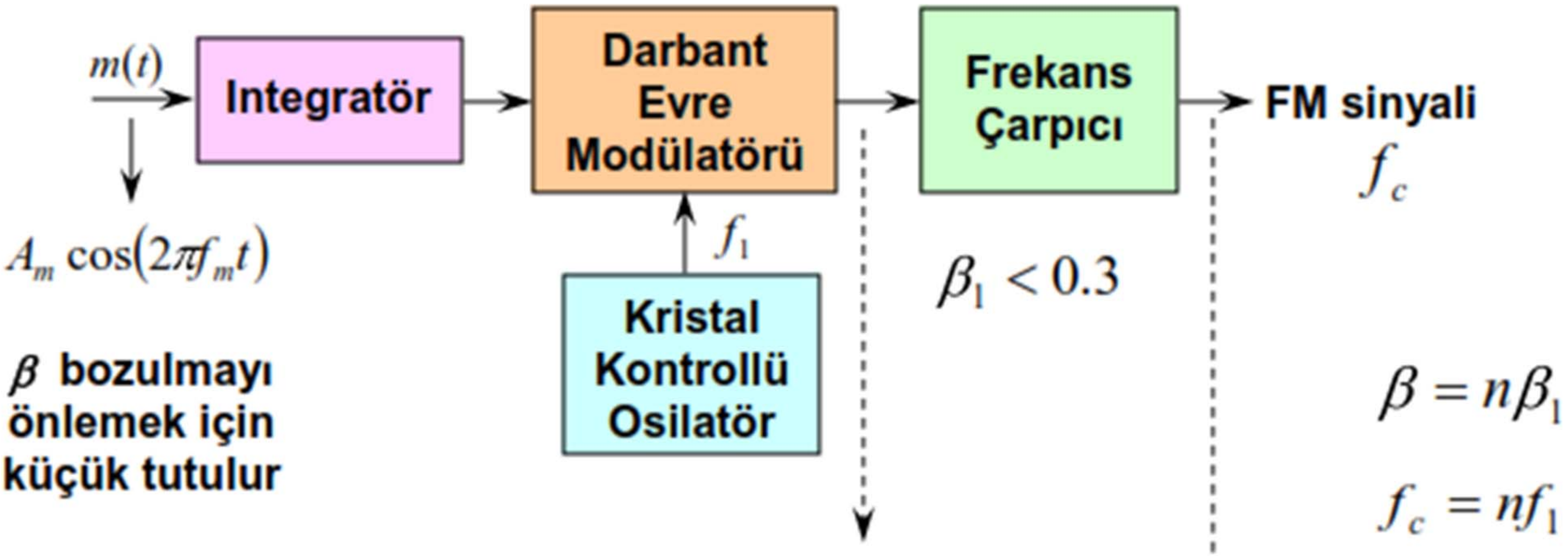
4.5. FM Sinyallerin Üretilmesi

İki şekilde üretilmesi mümkündür.

Doğrudan FM: **Taşıyıcı frekansının mesaj sinyali ile doğrudan değiştirilmesi şeklinde yapılır.**

Dolaylı FM: **Önce darbant FM üretilmesi ve takiben frekans çarpma yolu ile frekans sapmasının istenen değere ayarlanması şeklinde yapılır.**

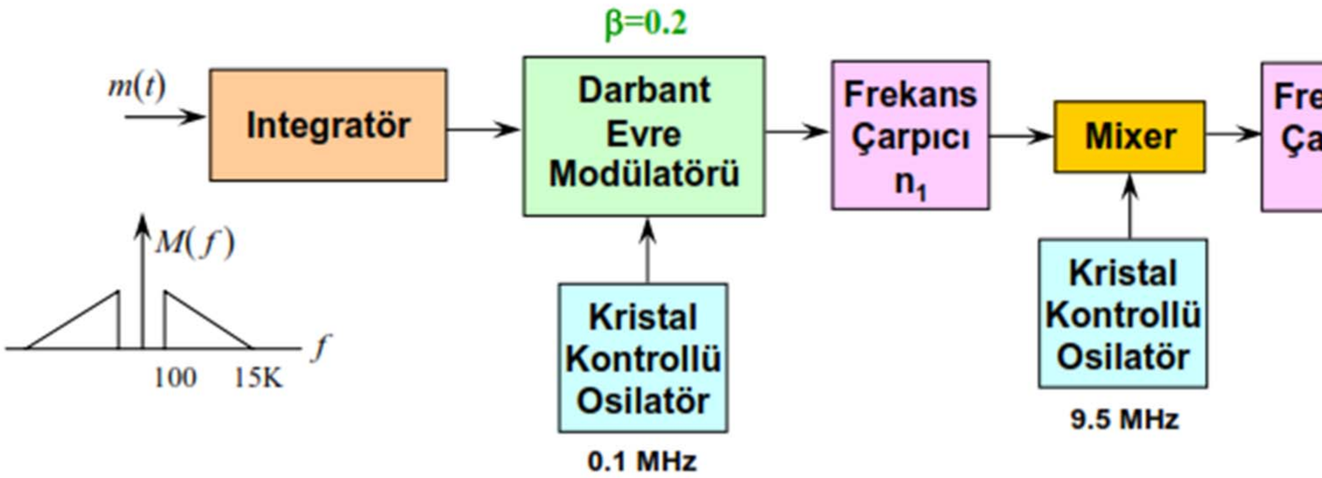
Dolaylı FM Üretimi



$$s_1(t) = A_1 \cos\left[2\pi f_1 t + \beta_1 \sin(2\pi f_m t)\right]$$

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)\right]$$

Dolaylı FM Üretimi Örnek



$f_c = 100MHz$

$\Delta f = 75kHz$

m(t)'nin en düşük frekanslı bileşeni 100 Hz $\Delta f_1 = 0.2 \times 100 = 20\,Hz$ **frekans sapması**

m(t)'nin en yüksek frekanslı bileşeni 15 kHz $\Delta f_1 = 0.2 \times 15 \times 10^3 = 3\,kHz$ **frekans sapması doğurmaktadır.** n_1 ve n_2 =?

$$n = \frac{\Delta f}{\Delta f_1} = \frac{75000}{20} = 3750$$ **Ancak, 3750x0.1MHz=375 MHz > 100 MHz**

$$n = n_1 n_2 = 3750 \qquad (f_2 - n_1 f_1) n_2 = 100\,MHz$$ **Frekans değerleri yerine yazılırsa**

$$n_1 = 75 \qquad n_2 = 50$$ **bulunur.**

4.6. FM Sinyallerin Demodülasyonu

Demodülator, FM sinyalinin anlık frekansı ile orantılı olarak genliği değişen bir sinyal üretir. Yani frekans değişimlerini genlik değişimlerine çevirir. Bu işlem iki şekilde yapılır.

- **Frekans Diskrimnatörü**
- **Evre Kilitlemeli Çevrim**

Frekans Diskrimnatörü

Esas olarak, iki adet zarf sezinleyici ve iki adet transfer fonksiyonu tamamen sanal olan eğim devresinden oluşur. İdeal eğim devrelerinin transfer fonksiyonu,

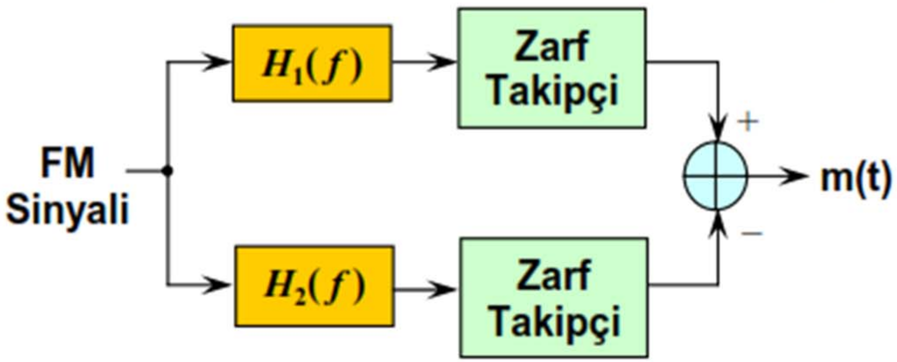
$$H_1(f)=\begin{cases} j2\pi a\left(f-f_c+\dfrac{B_T}{2}\right), & f_c-\dfrac{B_T}{2}\le f\le f_c+\dfrac{B_T}{2} \\ j2\pi a\left(f+f_c-\dfrac{B_T}{2}\right), & -f_c-\dfrac{B_T}{2}\le f\le -f_c+\dfrac{B_T}{2} \\ 0 & ,\ diger \end{cases}$$

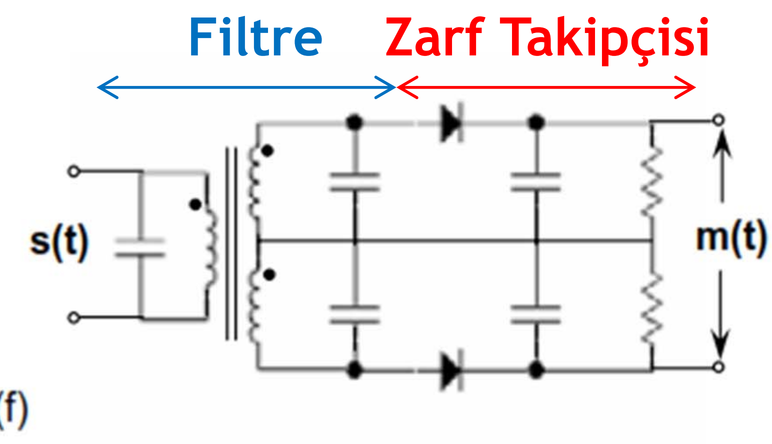
$$H_2(f)=H_1(-f)$$

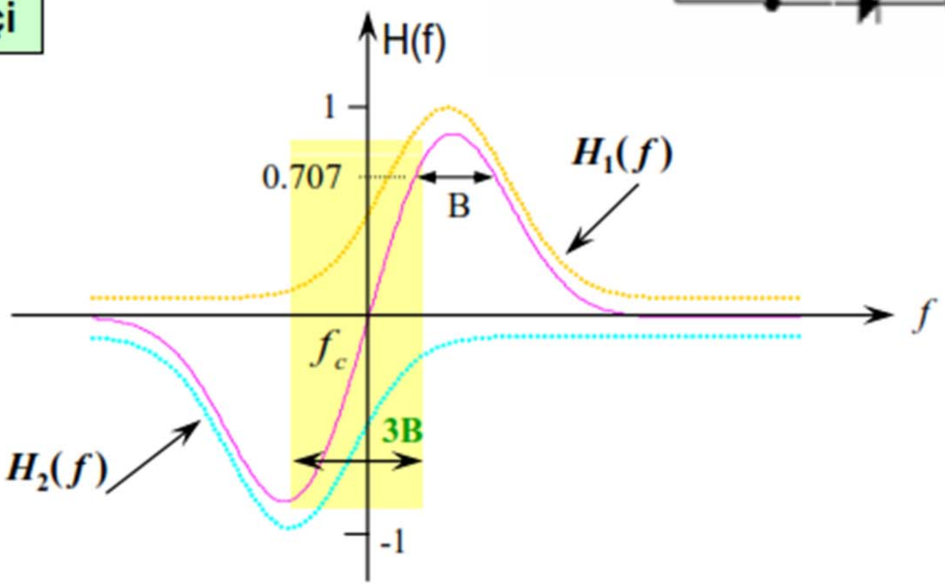
Birinci zarf sezinleyici çıkışı, $|\tilde{s}_1(t)| = \pi B_T a A_c\left[1+\dfrac{2k_f}{B_T}m(t)\right]$

İkinci zarf sezinleyici çıkışı ise, $|\tilde{s}_2(t)| = \pi B_T a A_c\left[1-\dfrac{2k_f}{B_T}m(t)\right]$

$$\begin{aligned} s_0(t) &= |\tilde{s}_1(t)| - |\tilde{s}_2(t)| \\ &= 4\pi k_f a A_c m(t) \end{aligned}$$

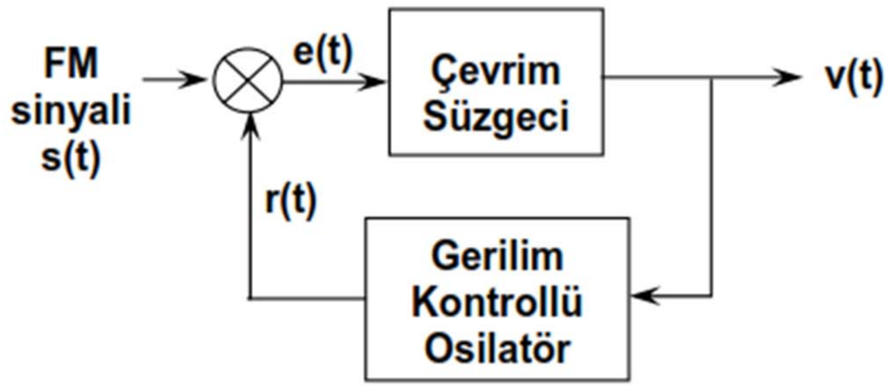






Evre Kilitlemeli Çevrim, PLL

Çarpıcı, çevrim süzgeci ve gerilim kontrollü osilatör şeklinde üç ana bileşeni olan negatif geri beslemeli bir sitemdir.



$$s(t) = A_c \sin\left[2\pi f_c t + \phi_1(t)\right]$$

$$\phi_1(t) = 2\pi k_f \int_0^t m(\tau)\,d\tau$$

$$r(t) = A_v \cos\left[2\pi f_c t + \phi_2(t)\right]$$

$$\phi_2(t) = 2\pi k_v \int_0^t v(\tau)\,d\tau$$

Çarpıcı çıkışının iki bileşeni $k_m A_c A_v \sin\left[4\pi f_c t + \phi_1(t) + \phi_2(t)\right]$ **Yüksek frekanslı**

$k_m A_c A_v \sin\left[\phi_1(t) - \phi_2(t)\right]$ **Düşük frekanslı**

k_m **: çarpıcı kazancı** $(Volt^{-1})$

Evre Kilitlemeli Çevrim, PLL

$$e(t) = k_m A_c A_v \sin\underbrace{\left[\phi_1(t) - 2\pi k_v \int_0^t v(\tau)\,d\tau\right]}_{\phi_e(t)}$$

Çevrim süzgeci çıkışı: $v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$

Türev alınarak v(t)'ye göre lineer bir denklem elde edilir.

$$\frac{d\phi_e(t)}{dt} = \frac{d\phi_1(t)}{dt} - 2\pi K_0 \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left[\phi_e(\tau)\right] h(t-\tau)\,d\tau \quad (1)$$

Nonlinear

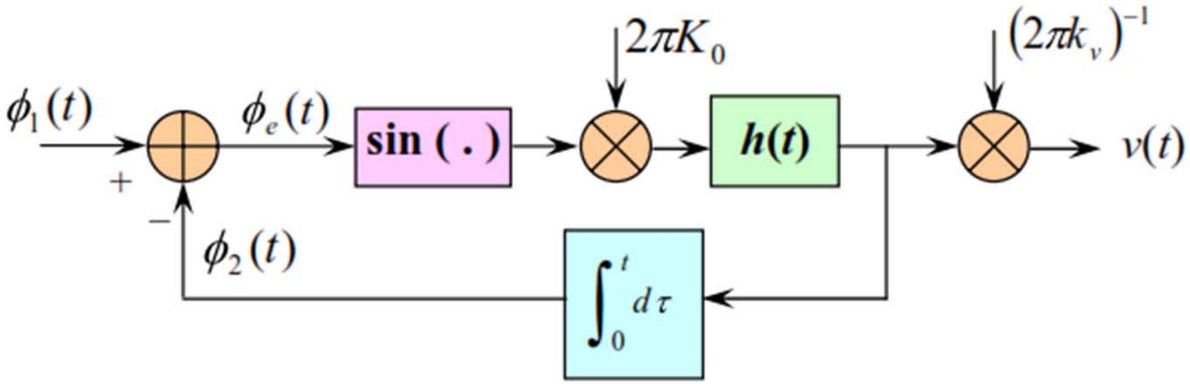
$$K_0 = k_m k_v A_c A_v \quad [Hz]$$

Kilitlenme durumunda $\phi_e(\tau) < 1\ radian$, $\sin\left[\phi_e(\tau)\right] \cong \phi_e(\tau)$

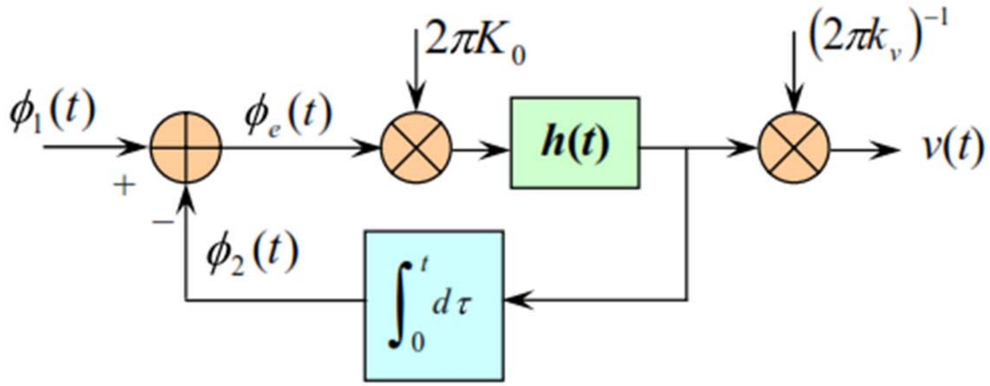
$$\frac{d\phi_e(t)}{dt} + 2\pi K_0 \int_{-\infty}^{\infty} \phi_e(\tau) h(t-\tau)\,d\tau = \frac{d\phi_1(t)}{dt} \quad (2)$$

Linear

Evre Kilitlemeli Çevrim, PLL



Nonlinear Model



Linear Model

$\phi_e(\tau)=0$ **durumunda devre giriş sinyalinin evresine kilitlenir.**

2 nin Fourier transformu alınarak,

$$\Phi_e(f) = \frac{1}{1+L(f)}\Phi_1(f)$$

Çevrim süzgeci Transfer fonksiyonu

$$L(f) = K_0 \frac{H(f)}{jf}$$

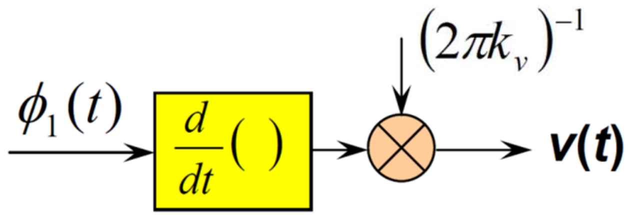
Açık çevrim transfer fonksiyonu

$$V(f) = \frac{K_0}{k_v} H(f)\Phi_e(f) \qquad H(f) = \frac{jf}{K_0} L(f)$$

$$V(f) = \frac{jf}{k_v} L(f)\Phi_e(f) \qquad V(f) = \frac{(jf/k_v)L(f)}{1+L(f)}\Phi_1(f) \qquad |L(f)| >> 1 \text{ için}$$

$$V(f) \cong \frac{jf}{k_v}\Phi_1(f)$$

$$v(t) \cong \frac{1}{2\pi k_v}\frac{d\phi_1(t)}{dt} \qquad \boxed{v(t) \approx \frac{k_f}{k_v} m(t)}$$



$$\phi_1(t) = 2\pi k_f \int_0^t m(\tau)\, d\tau$$

Gözlemler

- **EKÇ çıkışı mesaj sinyali ile aynıdır.**
- **Giriş sinyalinin bant genişliği çevrim süzgecininkinden çok büyük olabilir**

Gerilim Kontrollü Osilatör

- **GKO girişinin bant genişliği mesaj bant genişliği ile aynı olmasına rağmen, çıkışının bant genişliği geniş bantlı giriş FM sinyali ile aynıdır.**
- **EKÇ'nin en basit şekli H(f)=1 ile elde edilir. Bu durum çevrim süzgecinin olmaması anlamına gelir. Bu durumda EKÇ birinci mertebedendir denir.**