AÇI MODÜLASYONU

İ.Ü. ELEKTRİK ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ
İLETİŞİM LABORATUVARI
ARALIK, 2007

Niçin Açı Modülasyonu?

- GM' a göre gürültü ve diğer bozucu gürültülerin etkilerini azaltır.
- Açı modülasyonunu gerçekleştiren aygıtların karmaşıklığı daha azdır.
- Tüm bu iyileşmelerin yanında modüle edilmiş işaretin band genişliği, mesaj işaretinin band genişliğine göre çok artmıştır.

Açı Modülasyonu

- GM' da bilginin taşıyıcı genliğinde iletildiğini görmüştük.

$$\phi(t) = f(t)\cos(w_c t)$$

- Şimdi de bilginin taşıyıcının açısında iletilebileceğini göreceğiz:

$$\phi(t) = A_c \cos[\theta(t)]$$

- Ani frekans: $w_i(t) = \dfrac{d\theta(t)}{dt}$

  $\theta(t) = w_0 t + \theta$ lineer olarak zamanla değişebilir.

$$\theta(t) = \int_0^t w_i(\tau)d\tau + \theta_0$$

Açı Modülasyonu Türleri

- Taşıyıcı işaretin açısı, faz veya frekans değişimlerine bağlı olarak değişir. Faz açısı mesaj işaretine göre lineer olarak değişiyorsa Faz Modülasyonu,

$$\theta(t) = w_c t + k_p f(t) + \theta_0$$

$$w_i(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = w_c + k_p \frac{df(t)}{dt}$$

- Ani frekans mesaj işareti ile lineer olarak değişirse Frekans Modülasyonu elde edilir.

$$w_i(t) = w_c + k_f f(t)$$

$$\theta(t) = \int_0^t w_i(\tau)\, d\tau = \int_0^t \left[w_c + k_f f(t) \right] d\tau + \theta_0$$

$$= w_c t + k_f \int_0^t f(t) d\tau + \theta_0$$

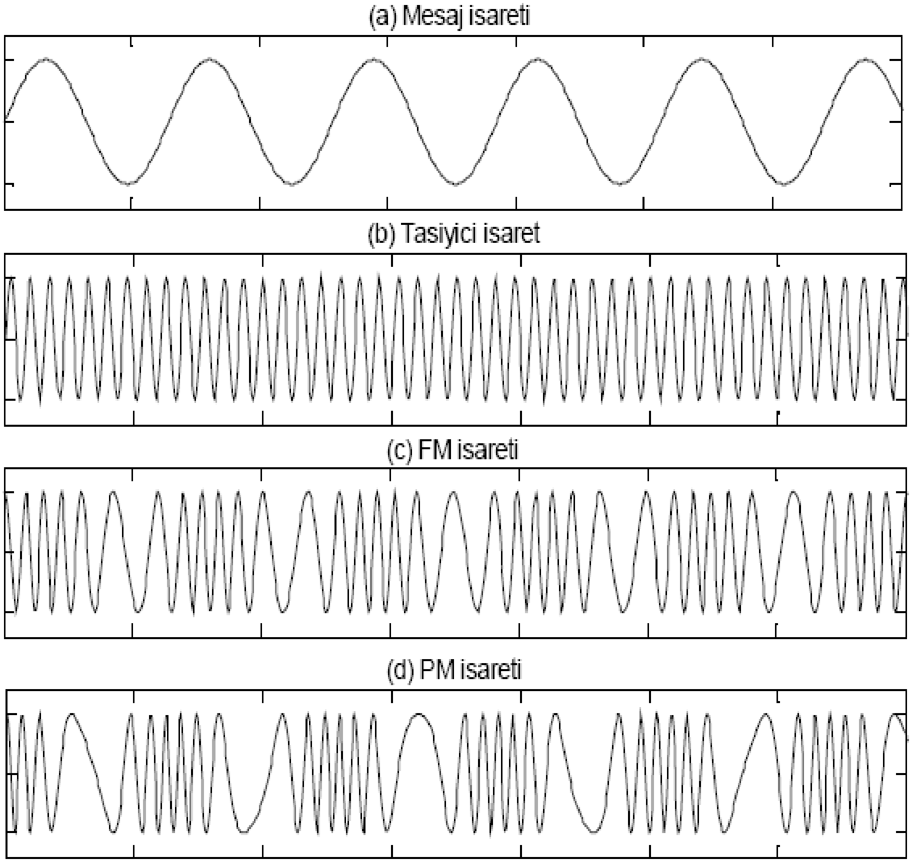
Açı Modülasyonu Türleri

- Faz Modülasyonlu işaret:

$$\phi_{PM}(t) = A_c \cos\left(w_c t + k_p f(t)\right)$$

- Frekans Modülasyonlu işaret:

$$\phi_{FM}(t) = A_c \cos\left(w_c t + k_p \int_o^t f(\tau)\, d\tau + \theta_0\right)$$

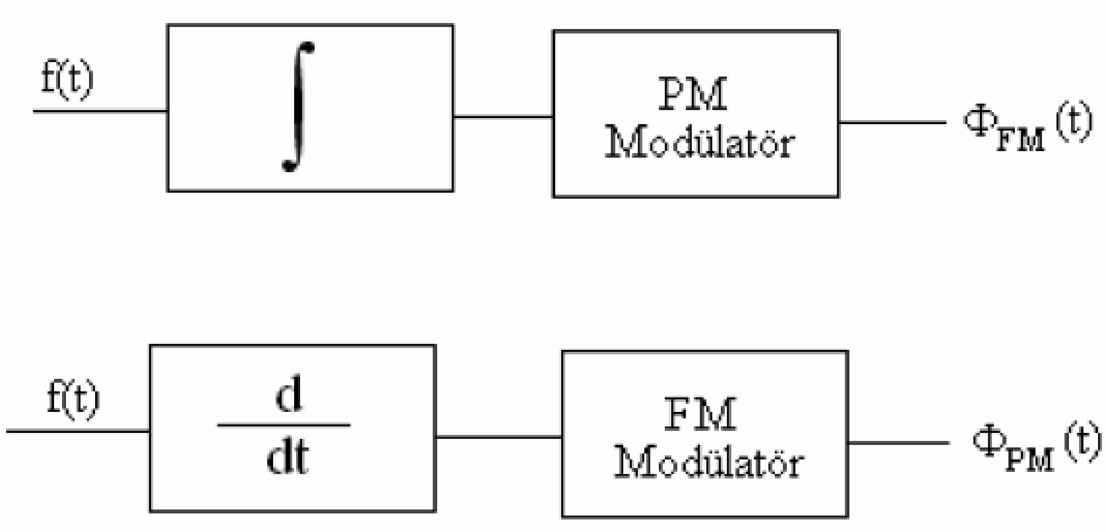


PM ile FM Arasındaki İlişki

- Faz modülasyonunda açı, mesaj işareti ile orantılı olarak değişirken, FM′ de ise açı, mesaj işaretinin integrali ile lineer olarak değişir.
- Mesaj işaretinin integrali alıp, bu işareti bir Faz modülatörüne uygularsak Frekans modülasyonlu bir işaret elde etmiş oluruz.

$$f_{FM}(t) = \frac{k_p}{k_f}\frac{df_{PM}(t)}{dt}$$

$$f_{PM}(t) = \frac{k_f}{k_p}\int_{-\infty}^{t} f_{FM}(\tau)d\tau$$



Açı Modülasyonu Lineer Midir?

- **Lineerlik:**

Eğer $d\phi(t)/df(t)$ ifadesi *f*(t)'den bağımsız ise, bu modülasyona lineer modülasyon denir.

Örnek: GM lineer bir modülasyondur.

$$\phi_{GM}(t) = A_c\left[1 + mf(t)\right]\cos(w_c t)$$

$$\frac{d\phi_{GM}(t)}{df(t)} = A_c m\cos(w_c t)$$

PM lineer değildir: $\phi_{PM}(t) = A_c e^{j\theta(t)} = A_c e^{j(w_c t+\theta_0)} e^{jk_p f(t)}$

$$= A_c e^{j(w_c t+\theta_0)}\left[1 + jk_p f(t) - \frac{1}{2!}k_p^{\,2} f^2(t) - \frac{1}{3!} jk_p^{\,3} f^3(t) + \dots\right]$$

$$\left(e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)$$

$\left|k_p f(t)\right| << 1,\ \left|k_f f(t)\right| << 1$ olmadıkça PM ve FM lineer değildir.

FM İşaretin Genel Spektrumu

- Açı modülasyonu doğrusal bir süreç olmadığından PM ve FM işaretlerin frekans spektrumları bilgi işaretinin spektrumuna benzemezler.
- Analizlerde kolaylık sağlaması adına mesaj işaretinin sinüzoidal olduğunu varsayacağız. (Ton modülasyonu)

$$f(t) = A_m \cos(w_m t)$$

$$\phi_{FM}(t) = A_c \cos\left[w_c t + k_f A_m \int_0^t \cos(w_m t) dt \right]$$

$$w_i = w_c + k_f f(t) = w_c + k_f A_m \cos(w_m t)$$

$$\Delta w = k_f A_m \text{ rad/sn, maksimum frekans sapması}$$

$$\phi_{FM}(t) = A_c \cos\left[w_c t + \Delta w \int_0^t \cos(w_m t) dt \right]$$

$$= A_c \cos\left[w_c t + \frac{\Delta w}{w_m} \sin(w_m t) \right]$$

$$\beta = \frac{\Delta w}{w_m}, \text{ modulasyon göstergesi (PM için de } \beta = k_p A_m)$$

FM İşaretin Genel Spektrumu

$$\phi_{FM}(t) = A_c \cos\left[w_c t + \beta \sin(w_m t)\right]$$

$k_f << 1$ ise FM lineer kabul edilir.

Bu durumda $\beta << 1$ olur.

Bu tür FM, Dar Bandlı FM olarak adlandırılır.

NBFM' in band genişliği $\approx 2B$ kadardır.

$k_f >> 1$ ise $\beta >> 1$ olur. Bu tür FM, Geniş Bandlı FM olarak adlandırılır. WBFM' in band genişliği $\approx 2k_f$ kadardır.

Dar Bandlı Frekans Modülasyonu

- FM işaretinin Fourier dönüşümünün bulunması zordur. Ancak, modülasyon nedeniyle tepe frekans kaymasının küçük tutulabildiği durumlarda, herhangi bir f(t) işareti için modüle edilmiş işaretin spektrumu bulunabilir. Bu durumda k_f küçüktür. Bu koşul β<0.2 ya da 0.5 olduğunda sağlanır. Bu tür modülasyon türüne NBFM denir.

$$\phi_{FM}(t) = \mathrm{Re}\left\{ A_c e^{j(w_c t+\theta)} e^{jk_f \int_0^t f(\tau)d\tau} \right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{ A_c e^{j(w_c t+\theta)} \left[1 + jk_f \int_0^t f(\tau)\,d\tau - \frac{k_f^2}{2!}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau \right]^2 + \dots \right] \right\}$$

$k_f << 1$ varsayıldığından yukarıdaki ifadede ilk iki terimden sonraki tüm terimleri sıfıra eşit kabul edebiliriz. Bu durumda NBFM ifadesi

$$\phi_{NBFM}(t) = \mathrm{Re}\left\{ A_c e^{j(w_c t+\theta)} \left[1 + jk_f \int_0^t f(\tau)\,d\tau \right] \right\}$$

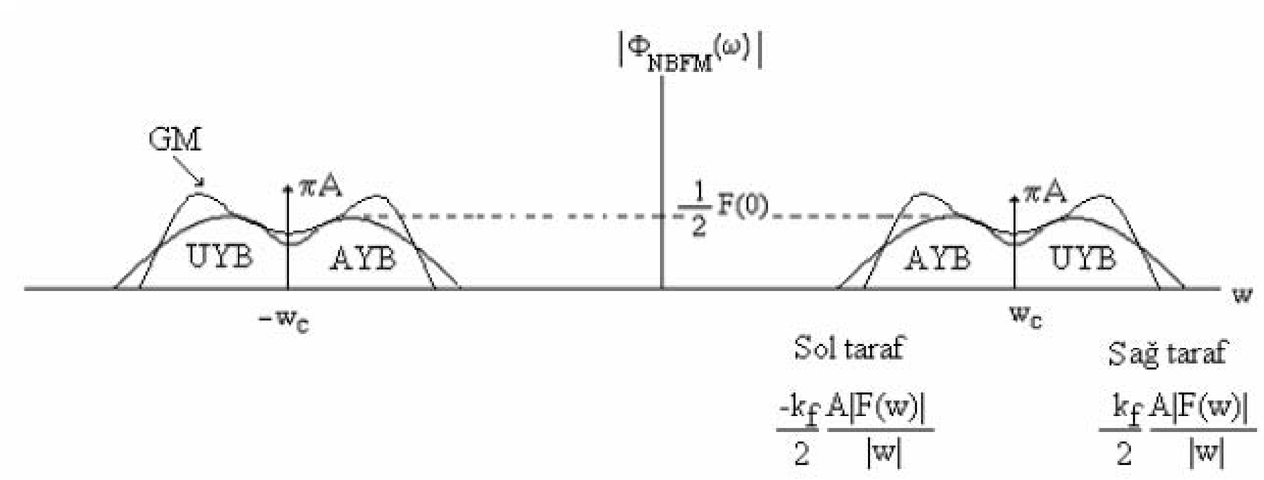
$$= A_c \left[\cos(w_c t) - \left(k_f \int_0^t f(\tau)\,d\tau \right) \sin(w_c t) \right] \text{ olur.}$$

NBFM İşaretinin Spektrumu

$$\phi_{NBFM}(t) = A_c\left[\cos(w_c t) - \left(k_f \int_0^t f(\tau)\,d\tau\right)\sin(w_c t)\right]$$

$$\phi_{NBFM}(w) = A_c\left\{\left[\pi\delta(w-w_c) + \pi\delta(w+w_c)\right] - k_f \frac{1}{2\pi}\left[\frac{F(w)}{jw}\right] * \left[\frac{\pi}{j}\delta(w-w_c) - \frac{\pi}{j}\delta(w+w_c)\right]\right\}$$

$$= \pi A_c\left[\delta(w-w_c) + \delta(w+w_c)\right] + \frac{A_c k_f}{2}\left[\frac{F(w-w_c)}{w-w_c} - \frac{F(w+w_c)}{w+w_c}\right]$$



NBFM İşaretinin Spektrumu

- NBFM dalga biçimi ile GM dalga biçimi arasındaki benzerlik dikkat çekicidir.
- Her iki spektrumda da impulselara karşı düşen aynı taşıyıcı terimler vardır.
- GM işaretine benzer şekilde NBFM'in band genişliği mesaj işaretinin band genişliğinin iki katıdır. Ancak NBFM işaretinin frekans bileşenlerinde $1/(w-w_c)$ ve $1/(w+w_c)$ çarpanları mevcuttur.
- NBFM' de pozitif ve negatif frekans bileşenli terimler arasında 180^0 faz farkı vardır.
- GM'da sadece genlik değişmektedir, faz değişmez. NBFM' de çok küçük bir genlik değişimi vardır. Bunun dışında faz mesaj işaretine bağlı olarak değişmektedir.
- GM' da modüle edilen işaret taşıyıcıyla aynı fazda olmasına rağmen NBFM' de 90^0 faz farkıyla eklenmiştir.

NBFM İşaretinin Spektrumu

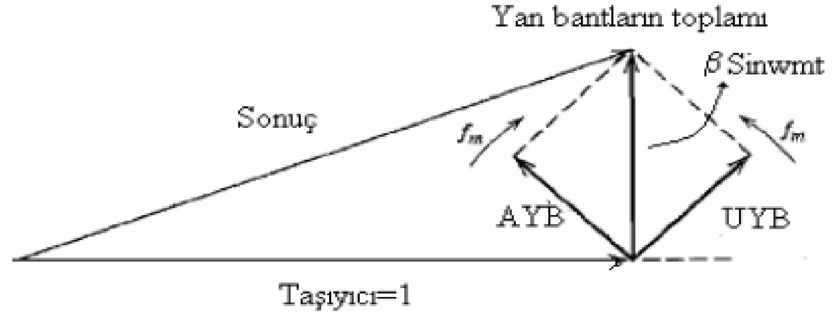
GM ile NBFM Arasındaki Farkın Fazör Gösterimi

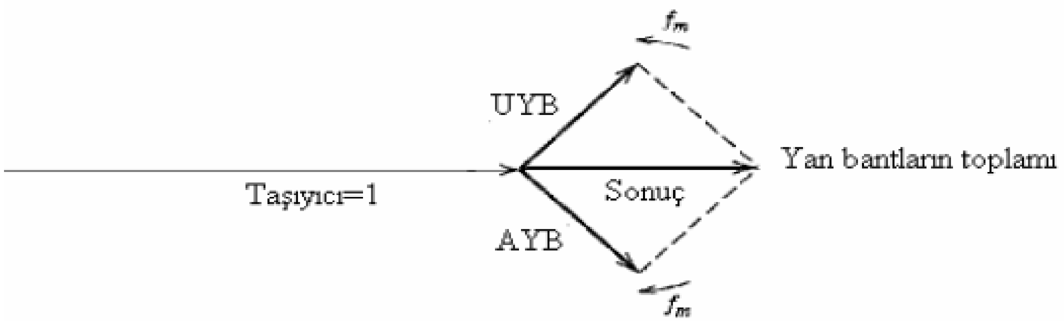
$$\Phi_{NBFM}(t) = Ae^{jw_C t}[1 + j\beta Sinw_m t]$$

$$= Ae^{jw_C t}[1 + \frac{1}{2}\beta e^{jw_m t} - \frac{1}{2}\beta e^{-jw_m t}]$$ olarak yazılabilir.

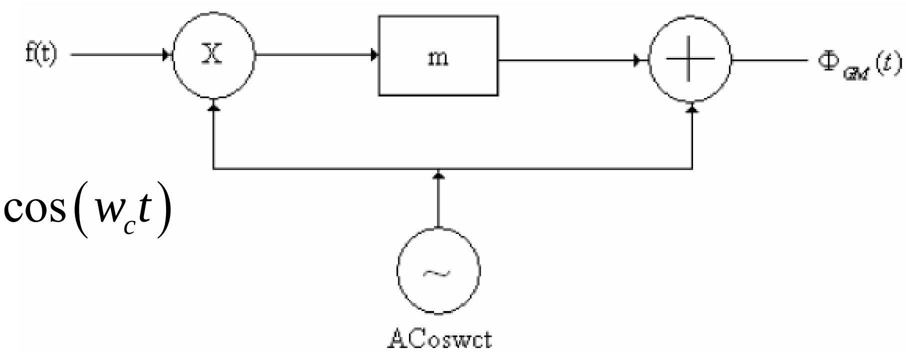
$$\Phi_{GM}(t) = Ae^{jw_C t}[1 + mCosw_m t]$$

$$= Ae^{jw_C t}[1 + \frac{1}{2}me^{jw_m t} + \frac{1}{2}me^{-jw_m t}]$$



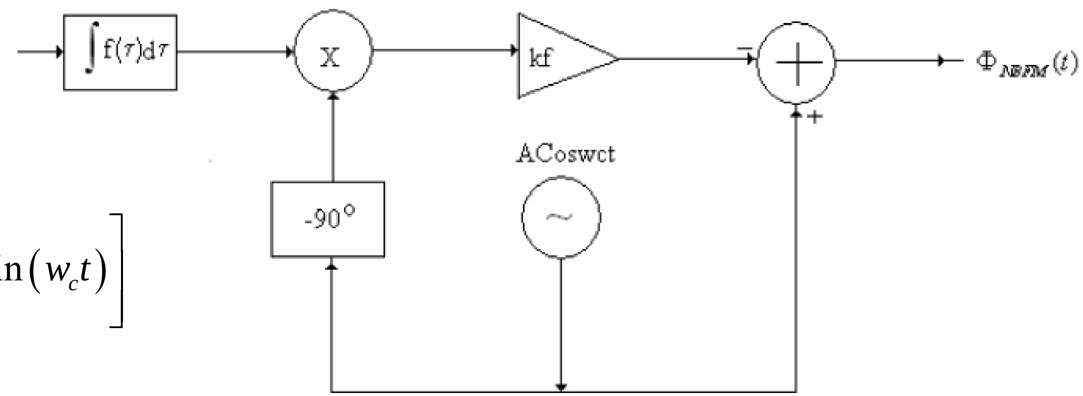


GM ile NBFM Karşılaştırması



$$\phi_{GM(t)} = A_c\left[1 + mf(t)\right]\cos\left(w_c t\right)$$

GM'nin blok diyagramı



$$\phi_{FM}(t) = A_c\left[\cos\left(w_c t\right) - k_f\left(\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right)\sin\left(w_c t\right)\right]$$

FM'in Blok diyagramı

Geniş Bandlı Frekans Modülasyonu

$f(t)=aCosw_mt$ seçelim.

$w_i(t)= w_C+k_f f(t)$ idi .

$w_i(t)= w_C+ak_f Cosw_mt$

$w_i(t)= w_C+\Delta wCosw_mt$

açı ise

$$\theta(t) = \int_0^t w_i(\tau)d\tau = \int_0^t (w_C + \Delta wCosw_m\tau)d\tau$$

$$\theta(t) = w_C t + \frac{\Delta w}{w_m} Sinw_m t + \theta_0$$

$$\theta(t) = w_C t + \beta Sinw_m t + \theta_0$$

Geniş Bandlı Frekans Modülasyonu

θ_0 işlem kolaylığı açısından 0 alınırsa,

$\Phi_{BFM}(t) = ACos\left[w_C t + \beta Sinw_m t\right]$ ya da

$\Phi_{FM}(t) = \mathrm{Re}\left\{Ae^{j\left[w_C t + \beta Sinw_m t\right]}\right\}$ yazılabilir.

$Cos(a+b) = CosaCosb - SinaSinb$ ' den

$\phi_{FM}(t) = A[Coswct\,.Cos(\beta Sinw_m t) - Sinwct\,.Sin(\beta Sinw_m t)$

Fakat spektrum için kompleks gösterim daha uygundur. $e^{j\beta Sinw_m t}$ 'nin fourier dönüşümü üstel fonksiyon zamanın bir fonksiyonu olduğu için temel frekans w_m olup aşağıdaki gibidir.

$$e^{j\beta Sinw_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jnw_m t}$$

burada F_n katsayıları

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{j\beta Sinw_m t}.e^{-jnw_m t}\,dt$$ ile hesaplanır.

Geniş Bandlı Frekans Modülasyonu

$$\xi = w_m t = \frac{2\pi}{T} t$$

değişken değişimi ile

$$d\xi = \frac{2\pi}{T} dt$$

$$F_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta Sin\xi - n\xi)} dt$$ olur.

Bu integral n ve ξ için nümerik olarak hesaplanabilir. Pek çok fiziksel problemde ortaya çıktığı için aşağıdaki tabloda gösterilmiştir. F_n katsayıları n ve β'nın fonksiyonu olup $J_n(\beta)$ ile gösterilmiştir. $J_n(\beta)$ n.dereceden argümanı β olan birinci tür Bessel fonksiyonunu ifade etmektedir.

O halde $F_n = J_n(\beta)$ olup

$$e^{j\beta Sin w_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{jnw_m t}$$ olur.

$$\Phi_{FM}(t) = \mathrm{Re}\left\{ A e^{jw_C t} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{jnw_m t} \right] \right\}$$ bulunur.

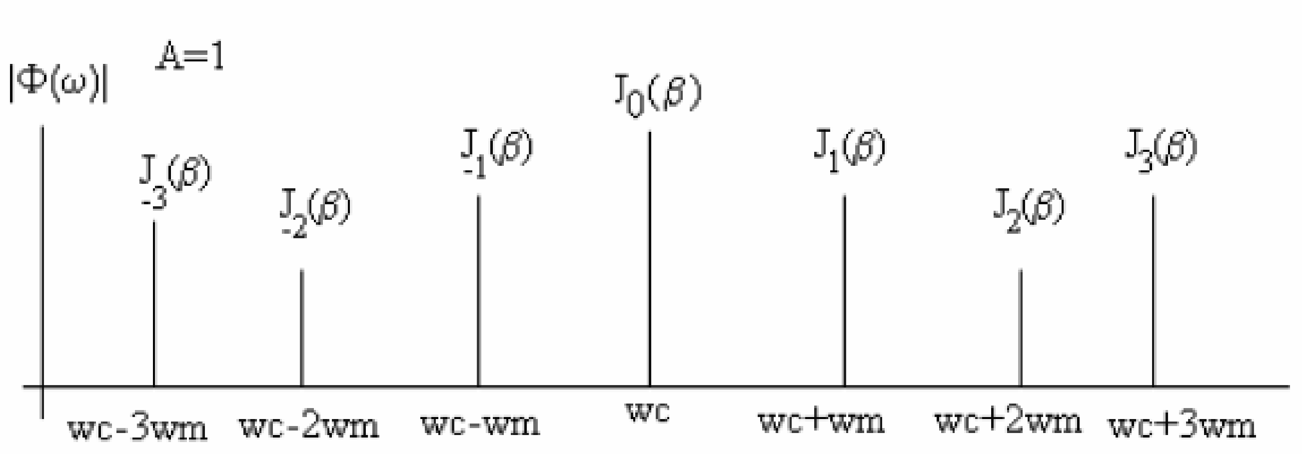
$$= A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) Cos(w_C + nw_m)t$$

Hangi Yan Bantlar Önemlidir?

- Bu sorunun cevabı uygulama alanına ve doğruluk ihtiyacına bağlı olarak değişir. Önemli yan bant konusunda yaygın olarak kabul edilmiş bir kritere göre bir yan bandın ortalama gücü modüle edilmemiş taşıyıcının ortalama gücünün %0.01'ine eşit ya da daha büyükse önemli yan bant olarak kabul edilir. Yan bandın gücü taşıyıcının gücünün 40dB aşağısı olarak kabul edilir.

$$|J_n(\beta)|^2 \geq 0.0001$$

$|J_n(\beta)| \geq 0.01$ olması durumunda yan bant önemlidir.



Bant Genişliği

- Büyük β için en son önemli yan bant n=β için olacaktır. O halde, frekans modülasyonlu işaretin bant genişliği, W,

$W=2nw_m \cong 2\beta w_m \cong 2\Delta w/w_m . w_m \cong 2\Delta w$ olur.

- β'nın çok küçük ve çok büyük değerleri arasında kalan ara değerleri için sinüzoidal modülasyonlu frekans modülasyonu işaretin bant genişliği

$W \cong 2(\Delta w+w_m) \cong 2w_m(1+\beta)$ şeklinde ifade edilebilir.

- Carson kuralı daima önemli yan bant tanımından daha az bant genişliği verir.
- Carson kuralı $\beta<<1$ ya da $\beta>>1$ durumları için doğru limitlere yaklaşır.
- Sinüzoidal olmayan işaretler için de Carson kuralı uygulanabilir.
- β=1 civarında bu kural maksimum bant genişliği hatasını verir.

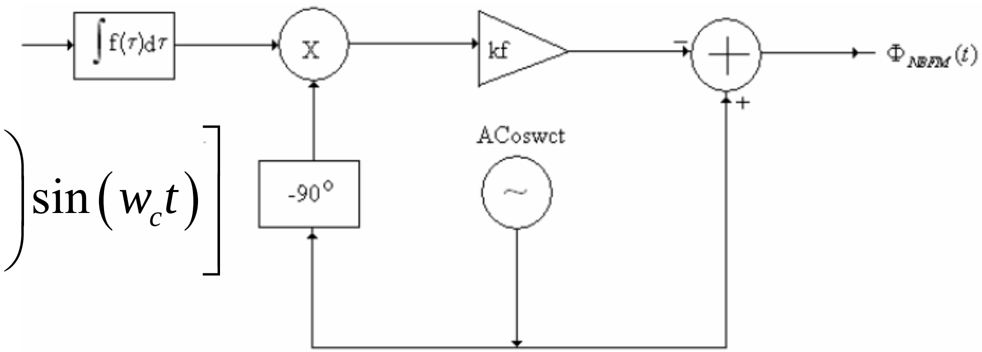
Frekans Modülasyonlu İşaretlerin Üretimi

1. Dolaylı FM

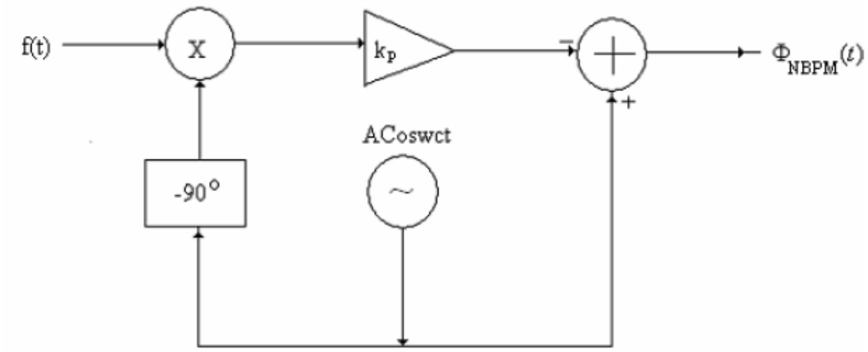
Mesaj işaretinin integrali alınır bununla bir taşıyıcının açısı modüle edilerek bir NBFM dalga biçiminde bir işaret üretilir. Daha sonra frekans çarpması yöntemiyle istenilen geniş band FM işaret elde edilir. (Armstrong yöntemi)

NBFM ve NBPM İşaretlerin Üretilmesi

$$\phi_{NBFM}(t) = A_c\left[\cos(w_c t) - k_f\left(\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right)\sin(w_c t)\right]$$



Dar bant FM işaretinin üretilmesi



Dar bant PM işaretinin üretilmesi

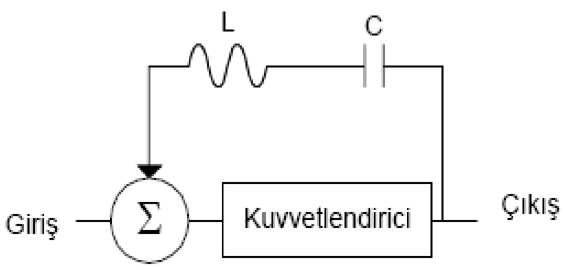
Frekans Modülasyonlu İşaretlerin Üretimi

2. Doğrudan FM

Taşıyıcı üretilirken, taşıyıcı frekansı doğrudan, modüle eden işarete bağlı olarak değiştirilir. Giriş işareti taşıyıcının frekansını denetler. Bunun için akort edilmiş L endüktansı ve C kapasitesinden oluşan bir rezonans devresi kullanılır. Bu devre bir osilatör girişine bağlanır. Osilatör çıkışında frekansı zamanla değişen bir sinüzoidal işaret elde edilir.

$$w_i(t) = \frac{1}{\sqrt{L(t)C(t)}}$$

$w_i(t) = w_c + k_f f(t)$ osilatörün frekansı mesaj işareti ile lineer olarak değiştirilmektedir.



Frekans Modülasyonlu İşaretlerin Demodülasyonu

- FM işaretinden f(t) işaretini elde etmek için FM işaretinin frekans değişimini doğru orantılı olarak genlik değişimine çevirmek gerekmektedir. Bu değişim iki tür aygıtla yapılır 1) Diskriminatörler 2) Faz Kilitleme Çevrimli Demodülatörler.

1. Diskriminatörler:

Girişindeki işaretin fazının türevini çıkışına iletir.

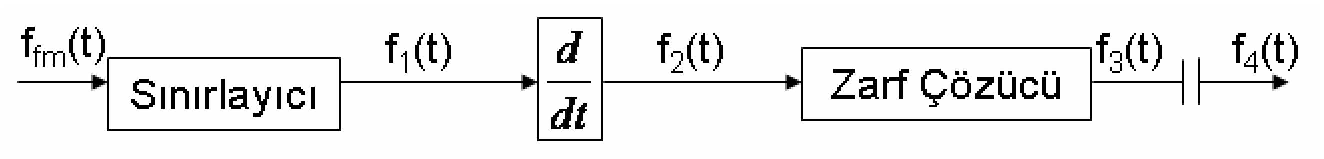
$$\frac{d\phi_{FM}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[A_c(t)\cos\left(w_c t + k_f \int_0^t f(\tau)\,d\tau\right)\right]$$

$$= \frac{d}{dt}A_c(t)\cos\left(w_c t + k_f \int_0^t f(\tau)\,d\tau\right) - A_c(t)\left(w_c t + k_f f(t)\right)\sin\left(w_c t + k_f \int_0^t f(\tau)\,d\tau\right)$$

$A_c(t)$ zamanla değişmiyor ise ilk terim sıfır olur. Genliğin zamana göre değişimini önlemek için sınırlayıcı kullanılır. İkinci terim genlik modülasyonlu bir işarettir. Bu işaretin zarfı $f(t)$ ile orantılıdır, dolayısıyla zarf çözücü yardımıyla mesaj işareti geri elde edilebilir. GM' lu işaretin zarfı aşağıdaki gibidir.

$$A_c w_c \left[1 + \frac{k_f}{w_c} f(t)\right]$$

Frekans Modülasyonlu İşaretlerin Demodülasyonu



$$f_{FM}(t) = A_c(t)\cos\left[w_c t + k_f \int f(\tau)\,d\tau\right]$$

$$f_1(t) = A_c \cos\left[w_c t + k_f \int f(\tau)\,d\tau\right]$$

$$f_2(t) = -A_c\left[w_c t + k_f \int f(\tau)\,d\tau\right]\sin\left(w_c t + k_f \int f(\tau)\,d\tau\right)$$

$$f_3(t) = A_c w_c + A_c k_f f(t)$$

$$f_4(t) = A_c k_f f(t)$$

Frekans Modülasyonlu İşaretlerin Demodülasyonu(Lab.da yapılan hali)

temel bantta indirgeme işlemi → sinyalin fazı bulunur → türev işlemi ve genlik ayarlaması

$m(t) = A\cos(2\pi f_m t)$ işareti için FM modüleli bir yapıda

$\phi = 2\pi k_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)d\tau = \dfrac{k_f A}{f_m}\sin(2\pi f_m t)$ şeklinde bulunabilir. Buradan modüleli işaret

$u(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t))$ olarak yazılır. β 'ya modülasyon indisi denir.

Örnekte verilen u(t) işareti için faz bilgisi $2\ pi\ k_f \int_{-\infty}^{t} m(\lambda)d\lambda$ şeklinde bulunur. Buradan çıkan sonucun türevi alınıp $2\pi k_f$ ile çarpılırsa $m(t)$ elde edilebilir.

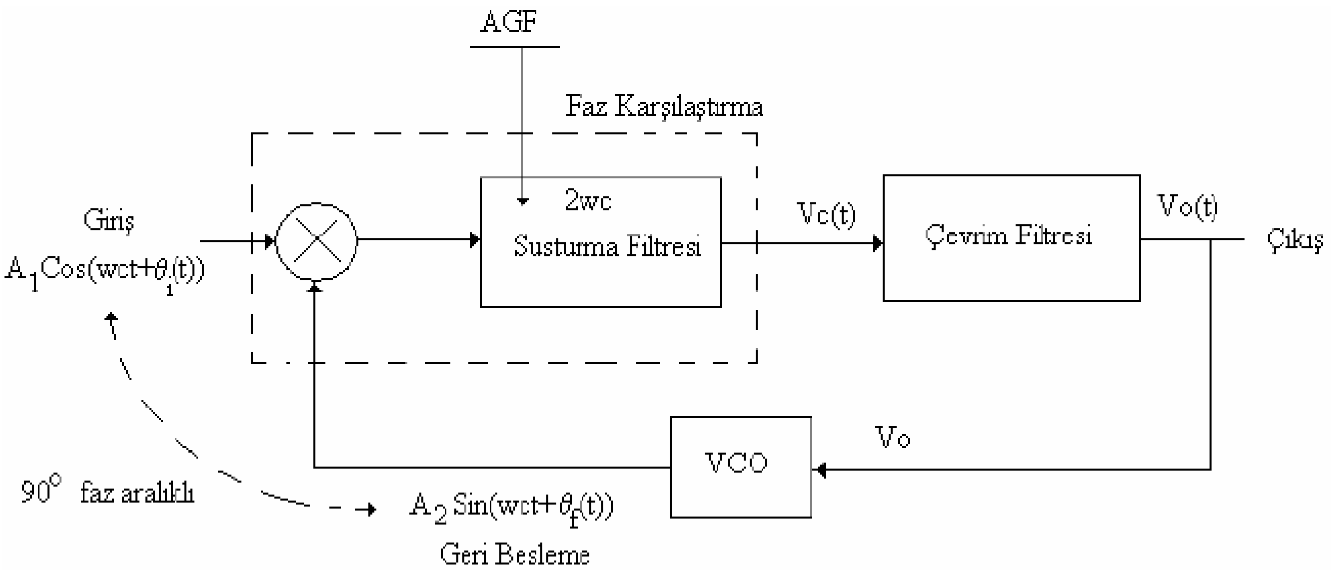
Frekans Modülasyonlu İşaretlerin Demodülasyonu

2. Faz Kilitleme Çevrimli Demodülatörler

- Bu yöntemde temel fikir, FM işareti takip eden bir gerilim kontrollü osilatör (VCO) kullanmaktır. VCO' nun giriş gerilimi modüle eden mesaj işareti f(t) olacaktır. Sayısal modülasyonda yaygın olarak kullanılan bu düzenlemeye faz kilitleme çevrimi (PLL) adı verilir.

- VCO (Gerilim Kontrollü Osilatör - Voltage Controlled Oscillator), çıkış işaretinin ortalama frekansını giriş gerilimi ile değiştiren bir tümleşik devredir. VCO basit olarak bir çarpıcı bir integral alıcı ve bir karşılaştırıcıdan oluşmaktadır. Frekans değişimi, geniş bir aralıkta kabul edilebilir derecede lineerdir. FM işareti, VCO kullanarak kolay bir şekilde üretilebilmektedir. Ancak, merkez frekansının kararsızlık göstermesinden (zamanla sapma göstermesinden) dolayı, VCO pratikte FM modülatörü olarak kullanılmaz.

Bir PLL Sistemin Blok Diyagramı

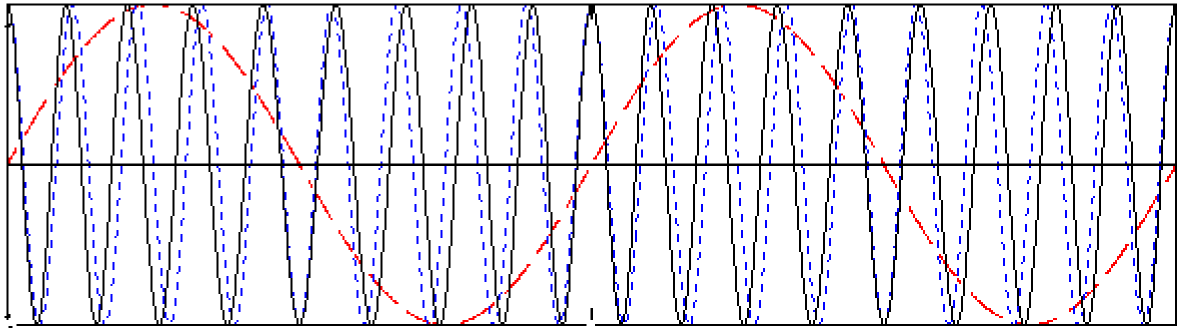


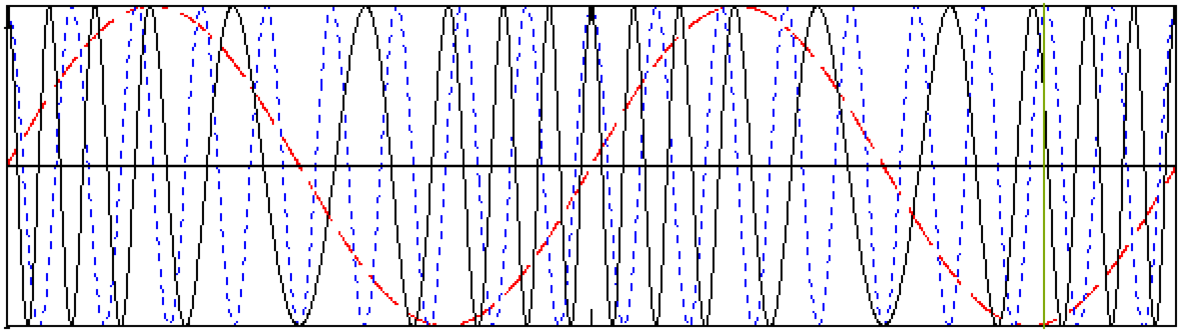
Genlik Modülasyonu ile Frekans Modülasyonu Karşılaştırması

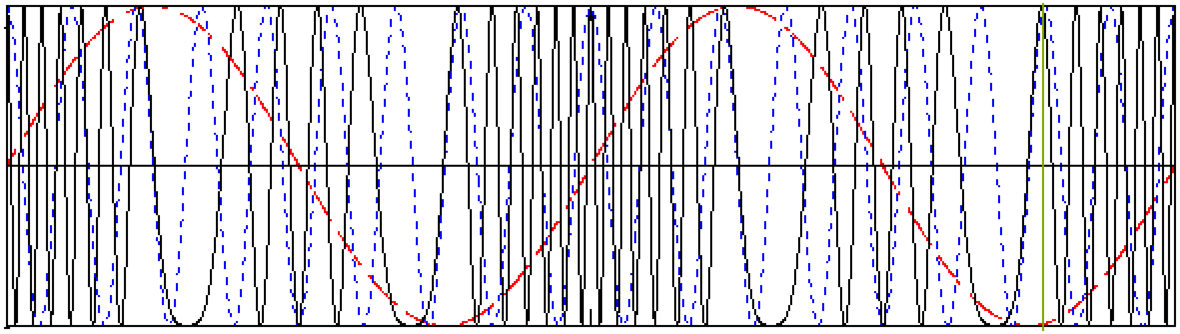
1. GM doğrusal bir modülasyondur. GM'lu işaretin frekans görüngesi bilgi işaretinin frekans görüngesinin kaydırılmış halidir.
2. GM'lu işaretin band genişliği $\leq$ 2B' dir.
3. GM' da SNR temelband işaretine göre daha iyi değildir. SNR ancak verici gücü yükseltirelerek arttırılabilir.
4. GM iletişimi FM'e göre gürültüden daha çok etkilenir.
5. GM ile yüzey dalga bileşeni kullanılarak uzak mesafe iletişimi yapılabilir.

1. FM doğrusal olmayan bir modülasyon türüdür. Modüleli işaret ile mesaj işaretinin görüngesi farklıdır.
2. FM'lu işaretin band genişliği $\geq$ 2B' dir.
3. FM'de verici gücü arttırılmadan β'yı dolasıyısıyla band genişliğini arttırarak SNR yükseltilebilir.
4. FM iletişiminde verici ve alıcı birbirini görmelidir. Uzak mesafelerde görerek haberleşmeyi sağlamak için röle istasyon (akratırıcılar) ya da uydular kullanılır.

Farklı β Değerleri İçin FM


$\beta = 1$


$\beta = 5$


$\beta = 25$