FREKANS MODÜLASYONU

1. Amaç

VCO (Gerilim Kontrollü Osilatör) yardımıyla FM (Frequency Modulation) işareti üretilmesi, FM işaretin güç spektrumunun analizi, sıfır-geçiş sayısı yardımıyla FM işareti demodülasyonu, PLL (Faz Kilitlemeli Çevrim - Phase Locked Loop)'in FM demodülatörü olarak kullanımının gösterilmesi, belirlenmiş bir faz sapması için Armstrong faz modülatörünün modellenmesi.

2. Ön Bilgi

2.1 Açı Modülasyonu Tanımı

Yüksek frekanslı bir işaret ile bilgi taşımak, işaretin genliğinin, frekansının veya fazının bir mesaj işareti ile modüle edilmesi ile gerçekleştirilebilir. Bu üç farklı modülasyon yöntemi sırasıyla, *Genlik Modülasyonu (Amplitude Modulation-AM), Frekans Modülasyonu (Frequency Modulation - FM)* ve *Faz Modülasyonu (Phase Modulation - PM)* olarak adlandırılır. Pratik uygulamalarda farklı modülasyon yöntemlerinin birleşimleri kullanılabilir. Örneğin televizyon haberleşmesinde parlaklık bilgisi AM, ses bilgisi FM ve renk tonu bilgisi PM yöntemleri kullanılarak iletilmektedirler.

PM ve FM, açı modülasyonunun (Angle Modulation) iki özel şeklidir. Açı modülasyonunda, genliği sabit tutulan bir sinüzoidal taşıyıcı işaretin açısı, bir mesaj işareti genliği ile modüle edilmektedir.

2.1.1 Faz Modülasyonu (Phase Modulation, PM)

A genlikli, μ açısal frekansında salınım yapan

$$x(t) = A\cos(\mu t) \tag{1}$$

biçimindeki sinüzoidal bir mesaj işareti ile A_c genlikli ve ω_c açısal frekanslı

$$c(t) = A_c\cos(\omega_c t) \tag{2}$$

biçimindeki bir taşıyıcı işaretin fazının modüle edildiği düşünülsün. Burada, $\mu = 2\pi f_m$ ve $\omega_c = 2\pi f_c$'dir. Modülasyon sonucunda oluşan işaret

$$x_c(t) = A_c\cos(\omega_c t + \varphi(t)) \tag{3}$$

şeklinde olacaktır. Burada $\varphi(t)$ anlık faz sapması olarak adlandırılır. PM'de anlık faz sapması

$$\varphi(t) = k_p\cos(\mu t) \tag{4}$$

biçiminde mesaj işareti ile doğru orantılıdır. Burada k_p modülatör sabitidir. Böylelikle modüle edilmiş işaretin $\Phi(t)$ ile gösterilen toplam açısı, mesaj işaretinin bir fonksiyonu haline gelir:

$$\Phi(t) = \omega_c t + k_p\cos(\mu t) \tag{5}$$

Burada k_p maksimum faz sapmasına eşit olup A ile doğru orantılıdır. PM için *modülasyon indeksi* k_p'ye eşittir. PM için anlık frekans $\omega_A(t)$, toplam açının zamana göre türevine eşittir:

$$\omega_A(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{d\left(\omega_c t + k_p cos(\mu t)\right)}{dt} \tag{6}$$

$$= \omega_c - \mu k_p \sin(\mu t).$$

2.1.2 Frekans Modülasyonu (Frequency Modulation, FM)

(1) denklemindeki mesaj işaretinin, (2) denklemindeki taşıyıcı işaretin frekansını modüle ettiği düşünülsün. Frekans modülasyonunda, taşıyıcı işaretin anlık frekansı,

$$\omega_A(t) = \omega_c + k_f cos(\mu t) \tag{7}$$

biçiminde doğrudan mesaj işareti ile değiştirilmektedir (mesaj işaretinin bir fonksiyonu olmaktadır). Burada "$k_f cos(\mu t)$" *frekans sapması*, k_f modülatör sabitidir. k_f aynı zamanda *maksimum frekans sapması*'na eşit olup A ile doğru orantılıdır. Toplam açı $\Phi(t)$, anlık frekansın integrasyonuyla elde edilir:

$$\Phi(t) = \omega_c t + (k_f/\mu) \sin(\mu t). \tag{8}$$

Δf Hz cinsinden maksimum frekans sapması olmak üzere

$$k_f = 2\pi\Delta f \tag{9}$$

şeklinde yazılabilir. Frekans modülasyonlu işaret (FM işareti) aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$x_c(t) = A_c cos(\omega_c t + (k_f/\mu) \sin(\mu t)). \tag{10}$$

FM'de β ile gösterilen modülasyon indeksi,

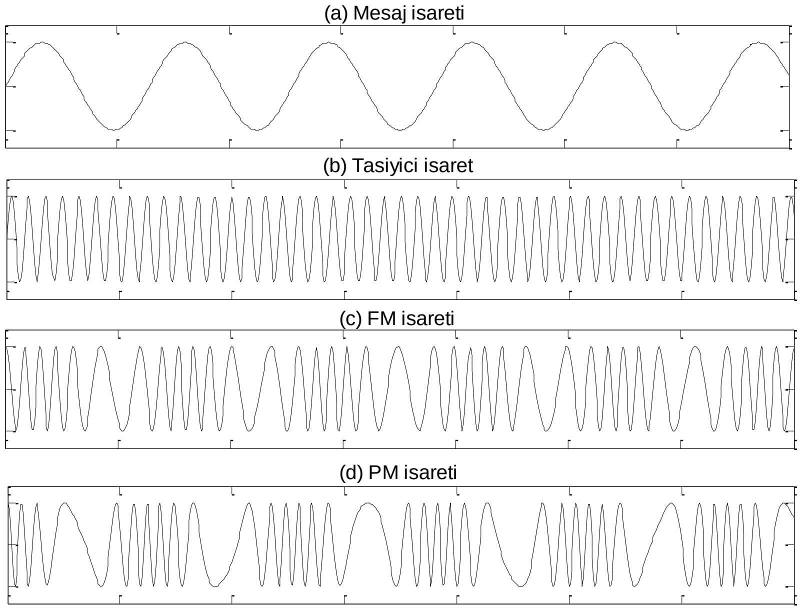
$$\begin{aligned} \beta &= k_f/\mu \\ &= 2\pi\Delta f / 2\pi f_m \\ &= \Delta f / f_m \end{aligned} \tag{11}$$

şeklindedir.

Mesaj işaretinin frekansı artarsa

- β azalır.
- Frekans spektrumundaki bileşenlerin bazılarının genlikleri artarken bazılarınınki azalır.
- Bileşenler arasındaki frekans farkı artar ancak band genişliğinin değişmediği kabul edilir. Çünkü küçük β değerlerinde yüksek frekans bileşenlerinin genlikleri göz önüne alınmayacak kadar küçük olurlar.

Şekil 1'de örnek olarak modüle eden sinüzoidal mesaj işareti, modüle edilmemiş taşıyıcı işaret, FM işareti ve PM işareti gösterilmektedir. Burada dikey eksen genliği, yatay eksen ise zamanı göstermektedir.



Şekil 1. (a) Modüle eden mesaj işareti, (b) Modüle edilmemiş taşıyıcı, (c) FM işareti, (d) PM işareti.

2.2 FM İşareti Spektrum Analizi

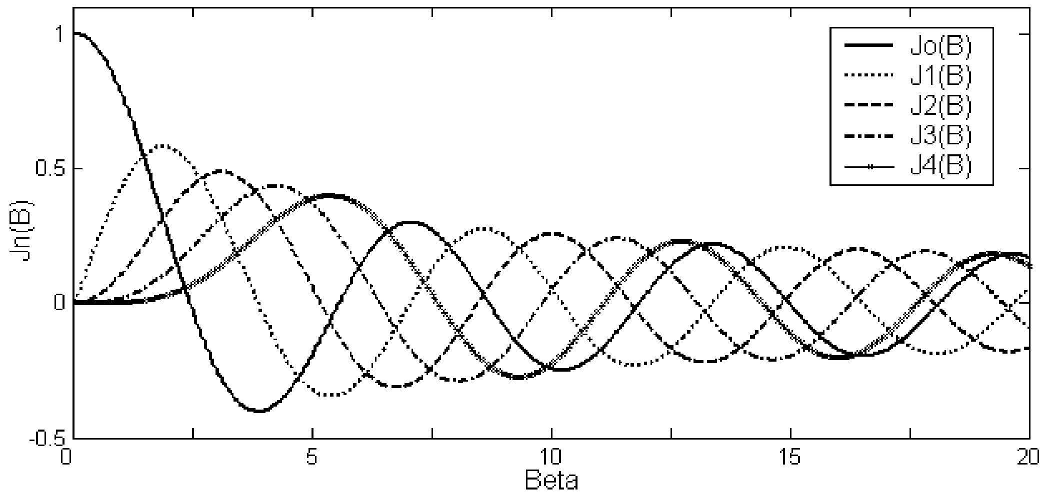
$x_c(t) = A_c cos(\omega_c t + \beta sin(\mu t))$ biçimindeki FM işareti, Fourier serisi açılımı kullanılarak Bessel fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\, cos(\omega_c + n\mu)\, t. \qquad (12)$$

Burada $J_n(\beta)$, *n.* dereceden β argümanlı Bessel fonksiyonudur. Bessel fonksiyonları

$$J_{-n}(\beta) = (-1)^n\, J_n(\beta) \qquad (13)$$

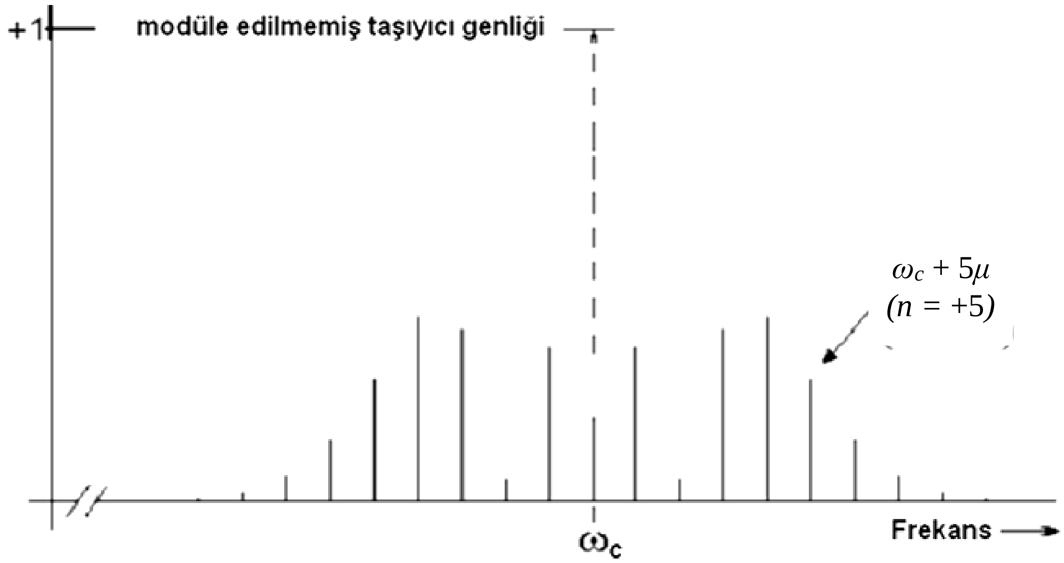
özelliğini sağlar. $J_n(\beta)$ ($n=1,2,...$) fonksiyonları $\beta = 0$ için 0 değerini alırlar. β büyüdükçe 0 etrafında salınım yapan ve genlikleri giderek azalan bir yapıya sahiptirler. $J_0(\beta)$ ise $\beta = 0$ için 1 değerini alır. Bessel fonksiyonlarının sıfır geçişleri düzenli değildir. Dolayısıyla periyodik bir yapıya sahip değillerdir. Şekil 2'de Bessel fonksiyonlarının β ile değişimi gösterilmektedir.



Şekil 2. Bessel fonksiyonları.

2.2.1 FM Spektrumunun Bazı Özellikleri

- FM işaretinin spektrumu, $\omega = \omega_c$ frekansında bir tane ve $\omega = \omega_c \pm n\mu$ değerlerinde sonsuz bileşene sahiptir ($n = \pm 1, 2, 3, ...$). Bileşenlerin genlikleri β'ya göre değişim göstermektedirler. Şekil 3'te bir FM işaretinin spektrumu gösterilmektedir.



Şekil 3. FM işareti spektrumu.

- $\omega = \omega_c$ frekansındaki bileşen 0. bileşen olarak adlandırılır. Bu bileşenin sağındaki (+) ve solundaki (-) bileşenler ±1, 2, 3,… şeklinde numaralandırılırlar.
- Spektrum bileşenleri ω_c *radyan/sn* kadar aralıklarla dizilirler.
- FM spektrumu $\omega = \omega_c$ etrafında simetriktir. $+n$. ve $-n$. bileşenlerin genlikleri $A_c J_n(\beta)$ kadardır.
- FM'de band genişliği teorik olarak sonsuzdur ancak pratikte belirli sınırlar arasında olduğu kabul edilir. Bu sınırlar β ve μ değerine bağlıdır. Band genişliğinin hesaplanmasında kullanılan yöntemlerden biri *"gücün %98'i kriteri"*dir. Bu kritere göre, toplam normalize işaret gücünün % 98'ini kapsayan band genişliğinin:

$$W_B \approx 2(\beta+1)\mu \tag{14}$$

  olduğu gösterilebilir. Bu kriter *"Carson kuralı"* olarak bilinir. Eğer $\beta << 1$ ise (Dar bantlı FM) band genişliği $W_B \approx 2\mu$, $\beta >> 1$ ise $W_B \approx 2\beta\mu$ olur.
- β büyüdükçe band genişliği de büyür.
- β büyüdükçe spektral bileşenlerin genlikleri artmaz, $EJ_n(\beta)$ ile orantılı bir şekilde salınım yapar.
- Bazı özel β değerleri için bazı yan band genlikleri sıfır olur. Bunlar *Bessel sıfırları* olarak adlandırılır.
- Spektrumdaki toplam güç β'dan bağımsızdır ve sabittir. Aşağıdaki eşitlik göz önüne alınarak bu gösterilebilir:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1 \ . \tag{15}$$

- $\omega = \omega_c$ frekansındaki bileşen maksimum değerine $\beta = 0$ için ulaşır.